

В.И.Петвиашвили. О.А.Похотелов

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ в плазме и атмосфере



МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
1989



УДК 533.9.01

Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 200 с. — ISBN 5-283-03945-5

Дается введение в теорию сильно нелинейных явлений в плазме и атмосфере, наиболее ярким проявлением которых является самоорганизация возмущений этих сред в виде структур типа солитонов и уединенных вихрей. Описываются эффекты усиления этих структур под влиянием неоднородности плазменных и атмосферных течений, вихри "отрицательной энергии" в плазме и т.д. Большое внимание уделено последним достижениям в исследовании устойчивости с использованием метода Ляпунова. Изложение ведется на физическом уровне строгости.

Для научных работников в области физики плазмы, динамики атмосферы и океана и математической физики.

Ил. 39. Библиогр. 187

Рецензент В.И. Карпман

Редактор З.Д. Андрееenko

П $\frac{1604120000-394}{051(01)-89}$ 28-89

ISBN 5-283-03945-5

© Энергоатомиздат, 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла как продолжение работы над обзором "Уединенные вихри в плазме", написанного для журнала "Физика плазмы". В процессе работы выяснилось, что предмет обзора составляет часть быстро развивающейся науки — теории уединенных волн. Поскольку у нас к тому времени имелся некоторый опыт работы в этой области, то авторы сочли полезным изложить с единой точки зрения как ее основы, так и последние достижения. Мы считаем, что для описания наиболее интересных свойств уединенных волн можно ограничиться традиционными методами математики на уровне строгости, принятом в физической литературе. Значительный прогресс в математической теории уединенных волн (метод обратной задачи рассеяния, преобразования Дарбу и т.д.) связан в основном со свойствами полной интегрируемости сравнительно узкого класса нелинейных уравнений. Большая же часть нелинейных уравнений и их уединенных решений, представляющих физический интерес, не попадает в этот класс. Между тем здесь получено много элегантных и важных результатов. Их изложение представляет предмет данной книги. Интересы авторов в основном сосредоточены в физике плазмы. Однако поскольку многие результаты из этой области могут иметь и другие приложения, в основном в физике атмосферы и океана, то нам представлялось естественным расширить круг рассматриваемых вопросов. При этом оказалось, что многие достижения из физики атмосферы и океана могут представлять большой интерес и для теории нелинейных волн в плазме.

В плазме впервые уединенные волны были найдены Р.З. Сагдеевым в 1958 г. на магнитозвуковой и ионно-звуковой ветвях колебаний [0.1]. В 1965 г. было введено понятие "солитон" [0.2]. С этого момента исследование нелинейных волн и особенно их частного вида уединенной волны стало одной из бурно развивающихся областей физики и математики. Было обнаружено, что некоторые нелинейные уравнения эволюционного типа сводятся к системе линейных уравнений, т.е. являются скрытнолинейными. Почти все они имеют важное приложение в физике. Среди них есть и двумерное уравнение, полученное Б.Б. Кадомцевым и В.И. Петвиашвили [0.3]. Свойства таких уравнений и способ их интегрирования методом обратной задачи рассеяния (ОЗР) подробно описан в [0.4]. В [0.5–0.7] дано введение в теорию нелинейных волн в плазме. К ним примыкает и книга [0.8], где большое внимание уде-

ляется колебаниям, стохастизирующимся под влиянием нелинейности в различных средах. В предлагаемой читателям книге основное внимание уделяется структурам типа вихрей и проблеме их устойчивости. Обсуждаются результаты лабораторного моделирования плазменных и атмосферных вихрей на мелкой вращающейся воде.

В основном излагаются вопросы, в разработке которых авторы принимали непосредственное участие. Не претендуя на всеобъемлющую полноту изложения, мы попытались осветить важнейшие стороны рассматриваемой проблемы. Однако с сожалением приходится допустить, что часть интересных сообщений, опубликованных за рубежом и у нас, возможно, осталась незамеченной. В ходе чтения может появиться потребность в более строгом и подробном обосновании некоторых выводов. Это можно сделать самостоятельно, что послужит полезным упражнением, заменяющим решение отдельных задач.

Авторы выражают благодарность академику Р.З. Сагдееву за обсуждение книги, коллегам, в сотрудничестве с которыми был получен ряд приведенных здесь результатов, и искренне признательны всем тем, кто помогал в работе над рукописью.

*В.И. Петвиашвили,
О.А. Похотелов*

ВВЕДЕНИЕ

Развитие нелинейной теории волн привело к появлению новых понятий — уединенная волна, уединенный вихрь, солитон. Пока нет полного единообразия в применении этих терминов. Все они относятся к уединенным возмущениям, не меняющим форму со временем. В некоторых типах таких возмущений стационарность формы достигается в результате компенсации дисперсионной расстройки частот нелинейным эффектом: корреляцией фурье-гармонок, составляющих пакет. Их можно назвать солитонами в диспергирующей среде. Часто солитонами называют и изолированные структуры, сохраняющие форму из-за инвариантности некоторых топологических признаков: замкнутости или зацепленности линий тока (спиральности), системы вложенных друг в друга магнитных поверхностей и т.д. Такие образования называют топологическими солитонами. Возможны и солитоны смешанных типов. К ним относятся уединенные вихри. Устойчивость солитонов обусловлена тем, что они реализуют минимум функционала Лапунова, состоящего из суммы интеграла энергии и других интегралов движения.

Дисперсия непосредственно связана со свойством экранировки внешних возмущений средой (например, с дебаевской экранировкой зарядов в плазме). Поэтому размеры солитонов характеризуются размерами экранировки и скоростью распространения. Если скорость уединенного возмущения совпадает со скоростью какой-либо линейной волны, то вместо экранировки происходит излучение. Этим объясняется, что размер солитона в диспергирующей среде тем меньше, чем сильнее отличается его скорость от скорости линейных волн. В некоторых средах скорость линейных волн очень мала (например, ионно-звуковые и альфвеновские волны поперек магнитного поля в плазме, волны Россби в атмосфере). В таких средах возможны бегущие вихри малой амплитуды, в которых размер экранировки приближается к характерному размеру дисперсии (равному циклотронному радиусу ионов в плазме или размеру Россби во вращающейся атмосфере).

В настоящее время общепризнано, что в средах, где возможны устойчивые солитоны, произвольное начальное возмущение, если оно локализовано в пространстве, излучает излишек энергии в виде свободных волн и за характерное время экранировки переходит в набор солитонов. Из-за слабости взаимодействия солитонов характерная длина

корреляции возмущений в такой среде порядка размера солитона. Поэтому здесь применимы статистические методы описания.

По-видимому, в будущем исследование уединенных волн (солитонов) приведет к лучшему пониманию внутренней природы элементарных частиц. Этим, главным образом, солитоны привлекают пристальное внимание физиков и математиков. Как следует из изложенного в книге материала, они представляют интерес также в физике плазмы и в геофизике, где эти понятия имеют много важных приложений. Привлекательны они и как чисто математический объект, поддающийся глубокому анализу.

Еще в прошлом веке были хорошо известны решения гидродинамического уравнения Эйлера в виде двумерных и трехмерных уединенных вихрей. Они представляют собой сгустки кинетической энергии, не расплывающиеся благодаря сохранению потоков завихренности и других величин. В последние годы широко исследуются крупномасштабные атмосферные вихри на основе модельного уравнения, предложенного почти одновременно Д. Чарни и А.М. Обуховым [0.9, 0.10] для описания волн Россби. Замечательное свойство этого уравнения состоит в том, что оно не имеет аналога в одномерном случае, поскольку содержит нелинейность в виде двумерного векторного произведения (якобиана). В 1978 г. было показано, что это же уравнение описывает потенциальные дрейфовые волны в плазме, что указывает на глубокую аналогию между дрейфовыми волнами и волнами Россби. Это вызвано сходством силы Кориолиса во вращающейся жидкости и силы Лоренца в замагниченной плазме.

Исследование вихрей в плазме началось с работы [0.11], где было выведено упрощенное уравнение, описывающее МГД-вихри, вытянутые вдоль магнитного поля. Ввиду того, что эти вихри локализованы слабо (степенным образом), они обладают свойством дальнего действия друг с другом и подвержены искажающему влиянию шира равновесного магнитного поля [0.12].

Дальнейшее развитие теории вихрей в плазме было связано с учетом влияния дисперсии волн, что наряду с учетом конечности дрейфовой скорости приводит к появлению качественно новых эффектов. В частности, уединенные вихри альфвеновского типа, для которых существенны эффекты дисперсии, могут самопроизвольно усиливаться под влиянием диссипации на электронах. Свободная энергия при этом черпается из неоднородности плазмы [0.13]. Существенно, что хотя в линейном приближении наличие шира магнитного поля стабилизирует диссипативные неустойчивости, уединенные альфвеновские вихри не чувствительны к шире из-за локализации на малых размерах. Они имеют свойства солитонов в диспергирующих средах, где фурье-гармоники, составляющие волновой пакет, в линейном приближении имеют разные частоты, зависящие от волнового вектора нелинейным образом. В результате со временем линейный волновой пакет в координатном пространстве

искажается и расплывается, другими словами, испытывает дисперсию и дифракцию. При наличии же нелинейности фурье-гармоники начинают взаимодействовать друг с другом, что рождает новые гармоники. Это приводит к корреляции осциллирующих гармоник с разными волновыми векторами и к появлению со временем особенностей в виде опрокидывания или коллапса волнового пакета. Таким образом, эффекты дисперсии и дифракции противоположны эффектам нелинейности. На многих ветвях колебаний возможны пакеты, в которых эти эффекты устойчиво уравниваются друг другом. Естественно, форма такого пакета не может быть произвольной. Она имеет вид уединенной волны или вихря, распространяющихся без изменений.

Уединенные вихри качественно отличаются от уединенных волн тем, что они хотя и могут бежать относительно среды, но переносят частицы, вращающиеся в вихре (захваченные частицы), приводя к усилению теплопроводности, диффузии и электрического сопротивления плазмы. Вихри образуются на ветвях колебаний, имеющих малую по сравнению со звуковой фазовую скорость, например на ветвях дрейфово-альфвеновских волн в плазме и волн Россби в атмосфере.

В [0.14] описывается важный класс топологических солитонов-вихрей на ветви спиновых волн в твердых телах с постоянным вектором намагниченности.

Большое значение имеет исследование устойчивости структур. Здесь для этого в основном используется метод Ляпунова, согласно которому для исследования устойчивости в упругих системах, где все частоты волн действительны, необходимо наличие первых интегралов движения. Этот метод хотя и труден для применения, но имеет то достоинство, что дает достаточное условие устойчивости. Отметим, что спектральные методы дают достаточные условия неустойчивости. Поэтому только с их помощью нельзя установить, может ли существовать реально исследуемое решение.

За основу при изложении принимается вывод упрощенного (модельного) уравнения, в котором явно выделены главные эффекты, а второстепенными поправками пренебрегается. Необходимым условием при этом является сохранение симметрии, присущей исходным уравнениям. В частности, должны сохраняться аналоги интегралов движения, имеющиеся у исходных уравнений. Это очевидное условие приходится отмечать в связи с тем, что имеются работы, в которых ему не уделяется достаточного внимания. В ряде работ из упрощенных уравнений получают решения, которые не удовлетворяют необходимым условиям гладкости. Такие решения иногда представляют интерес, но к ним надо относиться с осторожностью.

В последнее время понятие солитон стали применять и к уединенным стационарным возмущениям, распространяющимся в активных диссипативных средах [0.15]. Примером таких солитонов может служить

распространение нервного импульса по нервному волокну [0.16]. Эти возмущения описываются нелинейными уравнениями, в которых роль дисперсии играют диффузия и другие диссипативные эффекты. В отличие от них в уравнениях плазмы и атмосферы диссипативными эффектами в первом приближении можно пренебречь. Их можно учитывать как поправку по теории возмущений. Исключение составляет ленгмюровский кавитон. В последнее время получила развитие теория термодинамического равновесия между солитонами и свободными волнами, аналогичная теории равновесия в системе пар—жидкость. Такой подход развивался В.В. Яньковым (см., например, [0.17]).

Отличительной особенностью солитонов в активных средах является то, что их амплитуда и другие характеристики однозначно определяются параметрами среды. Ввиду своей дискретности они удобны для передачи информации, как это имеет место, например, в нервных волокнах. Эти вопросы подробно обсуждаются в [0.8].

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

1.1. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛЕОНТОВИЧА

Даже в линейном приближении уравнения, описывающие плазму и атмосферу, в общем случае имеют довольно громоздкий вид. Это связано с тем, что в них существует много различных коллективных степеней свободы, соответствующих различным ветвям колебаний. В важных предельных случаях, когда имеются малые параметры, эти уравнения можно упростить, проведя разложение по степеням малых параметров. При этом оказывается возможным отделение какой-либо ветви колебаний от других. Одним из часто применяемых способов упрощения является так называемое параболическое приближение, предложенное М.А. Леонтовичем [1.1]. Оно применимо к трехмерному линейному уравнению гиперболического типа

$$\partial_t^2 \varphi - \nabla^2 \varphi + \omega_0^2 \varphi = -\alpha \nabla^4 \varphi, \quad (1.1)$$

где ω_0 и α — некоторые постоянные. Случай $\omega_0 = 0$ соответствует волнам акустического типа, а $\omega_0 \neq 0$ — волнам оптического типа. Постоянная α имеет смысл параметра дисперсии и может быть как положительной, так и отрицательной. В зависимости от знака α среду называют средой с положительной или отрицательной дисперсией.

Это уравнение в длинноволновом пределе может быть сведено к уравнению параболического типа.

Рассмотрим сначала акустические колебания ($\omega_0 = 0$). В этом случае будем искать зависимость φ от времени и координат в виде

$$\varphi = \varphi(z - t, x, y, t). \quad (1.2)$$

Предположим, что зависимость φ от первого аргумента значительно сильнее, чем от остальных. Этим мы считаем, что волновой пакет распространяется в основном вдоль оси z . Считаем также, что эффекты дисперсии малы, т.е. член в правой части (1.1) много меньше остальных. Подставляя (1.2) в (1.1) и отбрасывая малые члены, получаем

$$\partial_z (2\partial_t \varphi - \alpha \partial_z^3 \varphi) + \nabla_{\perp}^2 \varphi = 0; \quad \partial_z \gg \nabla_{\perp} \quad (1.3)$$

Здесь производная ∂_t берется по последнему аргументу в (1.2). Это уравнение, сохраняя основные свойства исходного (1.1), описывает волны, бегущие только в сторону положительных или отрицательных z , независимо друг от друга.

В случае волн оптического типа упрощение возможно, если третий член в уравнении (1.1) много больше второго, а правой частью можно пренебречь. Тогда ищем зависимость φ от координат и времени в виде

$$\varphi = (1/2) \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\sqrt{\omega_0^2 + k_0^2} t + ik_0 z) + \text{к.с.}, \quad (1.4)$$

где к.с. — комплексное сопряжение. Зависимость комплексной амплитуды ψ от времени считаем слабой. Тогда (1.4) описывает волновой пакет с частотой ω_0 и волновым числом k_0 с комплексной огибающей ψ . Подставляя (1.4) в исходное уравнение (1.1), после отбрасывания малых членов получаем:

$$2i\sqrt{\omega_0^2 + k_0^2} \partial_t \psi + 2ik_0 \partial_z \psi + \nabla^2 \psi = 0. \quad (1.5)$$

Такое упрощение подобно переходу от уравнения Клейна—Гордона к нерелятивистскому уравнению Шредингера. В дальнейшем, если плотность энергии колебаний достаточно мала, уравнения (1.3) и (1.5) могут быть дополнены простым нелинейным членом. Это приводит к нелинейному уравнению Кадомцева—Петвиашвили (УКП) или нелинейному уравнению Шредингера (НУШ).

1.2. ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Ионный звук

Как известно, в плазме имеется большое разнообразие колебаний и волн. Рассмотрение их удобно начать с простейших колебаний акустического типа, например ионно-звуковых волн в однородной плазме.

Рассмотрим распространение таких волн, когда давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля, $\beta \equiv 8\pi p_0 / B_0^2 \ll 1$ (p_0 — невозмущенное давление плазмы, B_0 — невозмущенное магнитное поле). При этом электрическое поле \mathbf{E} в колебаниях можно считать потенциальным: $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \simeq 0$. Это означает, что его можно представить в виде: $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, где φ — электрический потенциал. Ветвь ионно-звуковых колебаний существует только в неизотермической плазме, где $T_e \gg T_i$, т.е. температура электронов много больше температуры ионов. Если это условие не выполняется, то их скорость распространения $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ приближается к тепловой скорости ионов $v_{Ti} = (2T_i/m_i)^{1/2}$. При этом имеет место сильное затухание Ландау на ионах. Так как скорость ионно-звуковых волн много меньше тепловой скорости электронов, то плотность числа электронов вследствие их большой подвижности успевает распределиться по Больцману

$$n_e = n_0 (e\varphi/T_e). \quad (1.6)$$

Уравнения движения и непрерывности ионов в пренебрежении столкновениями в линейном приближении имеют вид:

$$\partial_t \mathbf{v} = -(e/m_i) \nabla \varphi + \omega_{Bi} [\mathbf{e}_z, \mathbf{v}]; \quad (1.7)$$

$$\partial_t n_i + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \omega_{Bi} = eB_0/(m_i c). \quad (1.8)$$

Здесь \mathbf{v} — гидродинамическая скорость; n_0 — невозмущенная плотность числа частиц; n_i — возмущенная часть плотности ионов; $\mathbf{e}_z = \mathbf{B}_0/B_0$ — единичный вектор вдоль магнитного поля. Считаем, что давление ионов мало, что позволяет пренебречь его градиентом в уравнении движения.

При малых длинах волн существенно нарушение зарядовой нейтральности, что описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e (n_e - n_i). \quad (1.9)$$

Левая часть этого уравнения — мера нарушения нейтральности, приводящая к дисперсии с характерным размером $r_D = [T_e/(4\pi n_0 e^2)]^{1/2}$ — длиной Дебая.

Локализованный в пространстве и времени пакет волн можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) d\mathbf{k} d\omega, \quad (1.10)$$

где $\psi(\mathbf{k}, \omega)$ — функция, локализованная в пространстве волновых чисел и частот. В линейном приближении, подставляя (1.10) в (1.7)–(1.9), получаем, что ψ не является гладкой функцией от ω , а имеет вид $\psi = \psi_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$, где $\omega_{\mathbf{k}}$ — функция \mathbf{k} , и определяется из дисперсионного уравнения

$$1 + k^2 r_D^2 = \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} - \frac{k_{\perp}^2 r_s^2 \omega_{Bi}^2}{\omega_{Bi}^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}; \quad (1.11)$$

$\delta(x)$ — функция Дирака; $r_s = c_s/\omega_{Bi}$ — ларморовский радиус ионов, определенный по электронной температуре.

В этом случае пакет расплывается медленней, чем если бы ψ была гладкой функцией ω . Известно, что пакет вида (1.10) не меняет форму, только если $\omega_{\mathbf{k}}$ является линейной функцией от \mathbf{k} :

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_0 + \mathbf{b}\mathbf{k}, \quad (1.12)$$

где ω_0 , \mathbf{b} — постоянные. Такой пакет называется стационарным. В пакете волн акустического типа $\omega_0 = 0$. Ниже нас будут интересовать пакеты волн, в которых отклонения от зависимости (1.12) малы. Отклонения от (1.12) делятся на дисперсионные и дифракционные. Их значение определяется размером области локализации (носителя) $\psi_{\mathbf{k}}$. Если локализация достаточно сильная, то можно ограничиться первыми чле-

нами разложения. Поправки вдоль \mathbf{b} называют дисперсионными, а поперек — дифракционными. Это деление явно прослеживается в изотропном случае, когда частота колебаний настолько велика, что влиянием магнитного поля можно пренебречь $\omega \gg \omega_{Bi}$. Пусть имеется почти одномерный пакет, в котором локализация вдоль \mathbf{b} значительно сильнее, чем в других направлениях. Направим ось z вдоль \mathbf{b} . Тогда в выражении $\omega_{\mathbf{k}}$ допустимо разложение

$$\omega_{\mathbf{k}} \simeq c_s k (1 - k^2 r_D^2) \simeq c_s k_z [1 - k_z^2 r_D^2 / 2 + k_{\perp}^2 / (2k_z^2)]. \quad (1.13)$$

Это соотношение в координатном пространстве соответствует параболическому приближению и приводит к уравнению

$$\partial_z (\partial_t \Phi + c_s \partial_z \Phi + (c_s r_D^2 / 2) \partial_z^3 \Phi) = -(c_s / 2) \nabla_{\perp}^2 \Phi; \quad \Phi = e^{i\varphi} / T_e. \quad (1.14)$$

Из (1.14) явно видно, что пакет бежит вдоль z , испытывая дисперсионное расплывание по z и дифракцию в направлении x, y .

Принято говорить о средах с отрицательной и положительной дисперсией. В одномерном случае дисперсия называется положительной, если фазовая скорость ω/k растет с ростом волнового числа, и отрицательной — если она уменьшается.

Как следует из (1.13), (1.14), в неодномерном случае имеет смысл говорить и о средах с положительной и отрицательной дифракцией. Заметим, что отрицательная дифракция может иметь место в каком-либо направлении только в анизотропных средах. В ионно-звуковых волнах анизотропия проявляется при малых частотах, когда $\omega \lesssim \omega_{Bi}$. В пределе $\omega \ll \omega_{Bi}$ из (1.11) имеем

$$\omega \simeq c_s k_z (1 - k_z^2 r_D^2 / 2 - k_{\perp}^2 r_s^2 / 2). \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что при малых частотах и $k_z \gg k_{\perp}$ дифракция ионного звука отрицательна.

Линейное уравнение пакета в координатном пространстве, аналогичное (1.14), получается из (1.15) и имеет вид:

$$\partial_t \Phi + c_s \partial_z \Phi + (c_s r_D^2 / 2) \partial_z^3 \Phi = -(c_s r_s^2 / 2) \nabla_{\perp}^2 \partial_z \Phi. \quad (1.16)$$

Из (1.15) и (1.16) следует, что составляющая фазовой скорости вдоль z у низкочастотного ионного звука всегда меньше c_s . Как мы увидим ниже, это приводит к тому, что хотя соответствующие уединенные одномерные волны бегут быстрее c_s , в изотропной плазме (без магнитного поля) они устойчивы, а в анизотропной (с магнитным полем) неустойчивы. Таким образом, определяющим для устойчивости является не знак дифракции в отдельности, а отношение знака дисперсии к знаку дифракции.

Альфвеновские и магнитозвуковые волны

Ионно-звуковые колебания распространяются только в сильно неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. В замагниченной плазме при тех же частотах возможно распространение колебаний, в которых электрическое поле непотенциально и существенны колебания магнитного поля. Они являются слабо затухающими даже в изотермическом случае, так как их скорость много больше v_{Ti} . Для получения дисперсионного уравнения таких колебаний воспользуемся уравнениями двухжидкостной гидродинамики. Тепловыми поправками для простоты сначала пренебрежем и учтем их там, где это необходимо. В линейном приближении имеем:

$$m_i \partial_t \mathbf{v}_i = e \mathbf{E} + (e/c) [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}_0]; \quad (1.17)$$

$$m_e \partial_t \mathbf{v}_e = -e \mathbf{E} - (e/c) [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}_0]; \quad (1.18)$$

$$\partial_t n_{i,e} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_{i,e} = 0; \quad (1.19)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi e n_0}{c} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e); \quad (1.20)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (1.21)$$

Будем интересоваться частотами, меньшими ионной ленгмюровской частоты ω_{pi} . В этом случае колебания можно считать квазинейтральными:

$$n_i \simeq n_e = n. \quad (1.22)$$

Вводя массовую скорость плазмы

$$\mathbf{u} = (m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e) / m, \quad m \equiv m_i + m_e \quad (1.23)$$

и складывая (1.17) с (1.18) с использованием (1.19), (1.21), получаем

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi\rho_0} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}_0]. \quad (1.24)$$

Выражение для напряженности электрического поля с учетом инерции ионов и электронов имеет вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{B}_0] + \frac{m_i}{e} \partial_t \mathbf{u} - \frac{m_e}{e} \partial_t \mathbf{v}_e. \quad (1.25)$$

При этом уравнения Максвелла (1.20), (1.21) приводятся к виду

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi e n_0}{c} \frac{m}{m_i} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_e); \quad (1.26)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot} [\mathbf{u}, \mathbf{B}_0] - \frac{B_0}{\omega_{Bi}} \partial_t \mathbf{u} + \frac{B_0 m_e}{m_i \omega_{Bi}} \partial_t \mathbf{v}_e. \quad (1.27)$$

Уравнения (1.24), (1.26), (1.27) совместно с уравнением непрерывности

$$\partial_t n + n_0 \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.28)$$

приводят к следующему закону дисперсии:

$$\omega_{1,2} = \frac{c_A k}{2s} \left\{ \left[(1 + \cos \theta)^2 + \frac{k^2 r_A^2}{s^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2} \pm \left[(1 - \cos \theta)^2 + \frac{k^2 r_A^2}{s^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\}, \quad (1.29)$$

где $r_A = c_A / \omega_{Bi}$; $s^2 = 1 + k^2 r_0^2$; $r_0 = c / \omega_{pe}$; θ – угол между волновым вектором и магнитным полем. Верхний знак соответствует магнитному звуку, а нижний – альфвеновской волне. В случае малых волновых чисел $kr_A \ll 1$ (так как $r_0 \ll r_A$; то и $kr_0 \ll 1$). Дисперсионные уравнения этих ветвей принимают хорошо известный вид:

$$\omega_1 = c_A k; \quad \omega_2 = c_A k \cos \theta. \quad (1.30)$$

При распространении под малым углом к магнитному полю $(k_{\perp} / k_z)^2 \ll \ll k_z r_A$ и длинах волн, много больших r_A , из (1.29) имеем

$$\omega = c_A k_z [1 \pm |k_z| r_A / 2 + k_{\perp}^2 / (4k_z^2)]. \quad (1.31)$$

Вектор электрического поля магнитозвуковых волн вращается в сторону циклотронного вращения электронов, а альфвеновских – в сторону циклотронного вращения ионов.

При не слишком малых углах распространения ($\theta^2 \gg kr_A$) и $k_z r_A \ll \ll 1$ уравнение (1.29) можно упростить до вида:

$$\omega = c_A k \left[1 - \frac{k^2 r_A^2}{2} \left(\frac{m_e}{m_i} - \text{ctg}^2 \theta \right) \right] \quad (1.32)$$

для магнитозвуковых волн и

$$\omega = c_A k_z \left[1 - \frac{k^2 r_A^2}{2} \left(\frac{m_e}{m_i} + \text{ctg}^2 \theta \right) \right] \quad (1.33)$$

для альфвеновских волн.

Из 1.(32), (1.33) видно, что при углах, близких к $\pi/2$, знак дисперсии магнитозвуковых волн меняется, а альфвеновских (в пренебрежении тепловыми поправками) остается неизменным. Характерный размер дисперсии становится порядка скин-длины c / ω_{pe} . Поэтому при

$\beta > m_e/m_i$ ($r_s > r_0$) дисперсия таких волн может определяться тепловыми поправками, опущенными при выводе дисперсионного уравнения (1.29). При этом уравнения (1.32), (1.33) модифицируются к виду

$$\omega = c_A k \left[1 - \frac{k^2 r_A^2}{2} \left(\frac{m_e}{m_i} - \text{ctg}^2 \theta + \frac{\beta_i}{2} \right) \right]; \quad (1.34)$$

$$\omega = c_A k_z \left[1 - \frac{k^2 r_A^2}{2} \left(\frac{m_e}{m_i} + \text{ctg}^2 \theta - \frac{\beta_e + (3/4)\beta_i}{2} \right) \right], \quad (1.35)$$

где $\beta_{e,i} = 8\pi n_0 T_{e,i}/B_0^2$; $k_z \ll k_1$.

Из (1.34) видно, что тепловые поправки расширяют область углов, где магнитный звук имеет отрицательную дисперсию. В альфвеновской же волне тепловые поправки меняют знак дисперсии при $\beta > m_e/m_i$. Член с β_i в дисперсии магнитозвуковых и альфвеновских волн соответствует учету эффекта конечности ларморовского радиуса ионов. В альфвеновских волнах кроме этого эффекта вклад в дисперсию вносят и электронные тепловые поправки, пропорциональные β_e . Это соответствует учету конечности продольного электрического поля $E_{\parallel}/E_{\perp} \simeq k^2 r_s^2$ в альфвеновских волнах. Такие волны, где существенны тепловые поправки к дисперсии, называют кинетическими альфвеновскими или магнитозвуковыми волнами [1.3]. Отметим, что дисперсия магнитозвуковых волн при распространении под большими углами к магнитному полю остается слабой даже при $\omega \gtrsim \omega_{Bi}$.

1.3. МОДИФИКАЦИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим, как влияет на дисперсионные свойства волн наличие слабой неоднородности плазмы. Неоднородность считается слабой, если ларморовский радиус частиц мал по сравнению с характерным размером неоднородности a . В равновесном состоянии градиент давления плазмы вызывает появление диамагнитного тока и связанных с ним дрейфовых скоростей электронов и ионов $v_{ni,e} = \pm c T_{i,e} \kappa_n / (e B_0)$, ($\kappa_n \equiv \partial_x \ln n_0$). Наличие этих скоростей приводит к качественному изменению дисперсионных свойств волн, если фазовая скорость близка к дрейфовой скорости. В противном случае влияние неоднородности можно учесть в рамках обычного квазиклассического приближения. Отсюда и из предыдущего заключаем, что неоднородность сильно влияет только на ионно-звуковую и альфвеновскую ветки. Фазовая скорость таких колебаний при увеличении угла между волновым вектором и магнитным полем уменьшается.

Рассмотрим сначала, как влияет неоднородность на ионно-звуковые волны. С учетом неоднородности плазмы их дисперсионное уравнение

при $T_i \rightarrow 0$ принимает вид:

$$1 + k_{\perp}^2 r_s^2 - \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \frac{i\sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} (\omega - \omega_{ne}) = 0, \quad (1.36)$$

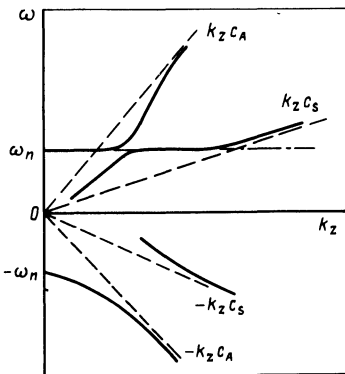
где $\omega_{ne} = k_y v_{ne}$ — дрейфовая частота электронов. С уменьшением k_z фазовая скорость этих волн вдоль магнитного поля растет и при $\beta > m_e/m_i$ приближается к альфвеновской. Электрическое поле колебаний остается потенциальным, пока $\omega/k_z \ll c_A$. В приближении $\omega/k_z \gg c_s$ уравнение (1.36) упрощается и дает

$$\omega = \omega_{ne} (1 - k_{\perp}^2 r_s^2 + k_z^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2) + i\sqrt{\pi} (\omega_{ne}^2 / |k_z| v_{Te}) (k_{\perp}^2 r_s^2 - k_z^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2) \quad (1.37)$$

$$c_s \ll \omega/k_z \ll v_{Te}; \quad k_{\perp} r_s \ll 1.$$

Такие волны называются потенциальными дрейфовыми. В этом пределе их скорость распространения вдоль магнитного поля ω/k_z больше тепловой скорости ионов даже в изотермической плазме. Поэтому в отличие от ионного звука дрейфовые потенциальные волны почти не испытывают затухания Ландау на ионах. Другая особенность состоит в том, что скорость распространения ω/k становится меньше дрейфовой скорости. Как видно из (1.36), это приводит к изменению знака затухания Ландау. В результате наступает так называемая дрейфово-диссипативная неустойчивость [1.4, 1.5]. Амплитуда потенциальных дрейфовых волн растет, хотя энергия диссипирует. В некоторых случаях столкновительная диссипация превосходит затухание Ландау. Можно показать, что знак диссипативного члена пропорционален $\omega - \omega_{ne}$. Отметим, что солитоны-вихри на этой моде, рассматриваемые в гл. 6, имеют скорость больше дрейфовой и поэтому не могут усилиться за счет этого эффекта. При $\beta > m_e/m_i$ с уменьшением k_z скорость распространения вдоль магнитного поля приближается к скорости Альфвена.

При этом становится существенным возмущение магнитного поля. Потенциальная дрейфовая волна переходит в дрейфово-альфвеновскую (рис. 1.1) с дисперсионным уравнением вида



Р и с. 1.1. Зависимость частоты альфвеновских и ионно-звуковых колебаний в неоднородной плазме от продольного волнового числа k_z при постоянном k_{\perp} . Видно, что при распространении в сторону ларморовского дрейфа электронов частоты ветвей приближаются друг к другу

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 + \omega\omega_{ni} - k_z^2 c_A^2) (\omega - \omega_{ne}) \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) = \\
 & = k_{\perp}^2 r_s^2 k_z^2 c_A^2 (\omega - \omega_{ni}).
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Здесь $\omega_{ni,e} = k_y v_{ni,e}$ — дрейфовая частота ионов и электронов соответственно. При $\omega \simeq k_z c_A \ll \omega_{ne}$ затухание Ландау меняет знак, что приводит к неустойчивости [1.6]. Неустойчивость возможна и за счет столкновительной диссипации на электронах.

Дрейфовые волны возможны и при $k_{\perp} r_{Bi} \gg 1$, где r_{Bi} — ларморовский радиус ионов. В этом случае ионы эффективно не замагничены и распределены по Больцману. Дисперсионное уравнение при этом имеет вид [1.7]:

$$(\omega - \omega_{ni}) (\omega - \omega_{ne}) = k_{\perp}^2 r_{Bi}^2 k_z^2 c_A^2 (1 + T_e/T_i). \tag{1.39}$$

Уравнение (1.39) описывает две моды, бегущие в сторону ларморовского дрейфа электронов или ионов. Скорость колебаний, принадлежащих обоим ветвям, превосходит соответствующие дрейфовые скорости. Поэтому в линейном приближении они устойчивы. Однако, как будет видно из гл. 6, вихри на этих ветвях бегут со скоростью, меньшей дрейфовой. Это приводит к их усилению за счет диссипации, как в дрейфо-диссипативной неустойчивости.

При очень малых k_z и $k_{\perp} r_{Bi} \ll 1$ скорость дрейфовых волн может быть больше альфвеновской скорости и тепловой скорости электронов. Инерцией электронов по-прежнему можно пренебречь. Такие волны называют желобковыми. Из-за большой длины волны вдоль \mathbf{V}_0 в них очень существенны эффекты кривизны и неоднородности магнитного поля. В простейшем случае эти эффекты можно учесть с помощью введения эффективной "силы тяжести", действующей на электроны и ионы. Колебаниями магнитного поля в них можно пренебречь. Их дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega^2 - \omega\omega_{ni} - g\kappa = 0, \tag{1.40}$$

где g — эффективное ускорение свободного падения; $g \simeq p_0/(\rho_0 R)$ (p_0 — давление плазмы; R — характерный размер неоднородности магнитного поля); $\kappa \equiv (\partial_x \ln n_0)^{-1}$ — характерный размер неоднородности плазмы; ρ_0 — массовая плотность плазмы.

1.4. ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Выше кривизну силовых линий мы учитывали введением эффективной силы тяжести. Такой подход слишком сильно упрощает рассмотрение явления, так как не учитывает особенности эффекта сжимаемости плазмы, присущего реальному магнитному полю. Учтем эти эффекты более детально при анализе желобковой неустойчивости. В магнитных

ловушках в отсутствие шира эта неустойчивость является наиболее опасной с точки зрения перестройки всей равновесной конфигурации. Она возникает, если давление плазмы спадает достаточно быстро при удалении от центра. Критерий такой неустойчивости для ловушек с замкнутыми силовыми линиями был получен Б.Б. Кадомцевым [1.8]:

$$U \partial_U p < -\gamma p, \quad (1.41)$$

где p – давление плазмы; $U = \oint dl/B$ – удельный объем магнитной силовой трубки; интеграл по контуру берется вдоль силовой линии. При получении этого критерия предполагается, что давление постоянно на поверхностях ($U = \text{const}$), т.е. давление является только функцией U . Однако в ряде случаев, например в магнитосфере Земли, поверхности равных p и U могут не совпадать. В этом случае возникает равновесный электрический ток вдоль \mathbf{B} . В такое состояние магнитосфера переходит при наличии конвекции плазмы из хвостовой области [1.9]. Покажем, что непостоянство давления плазмы на изоповерхностях может приводить к ранее известным неустойчивостям [1.10].

Рассмотрим магнитную ловушку с проводящими торцами. В магнитосфере Земли в качестве таких торцов является проводящая ионосфера с интегральной проводимостью Σ_p Педерсена [1.9]. Плотность продольного тока, втекающего в ионосферу, связана с дивергенцией поперечного электрического поля в ионосфере соотношением

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \Sigma_p \text{div} \mathbf{E}_{\perp}, \quad \Sigma_p = \int \sigma_p dl, \quad (1.42)$$

где интегрирование проводится по толщине ионосферы; σ_p – проводимость Педерсена.

Вклад магнитосферы в плотность продольных токов определяется из уравнения замыкания токов

$$\text{div} \mathbf{j}_{\perp} + \text{div} \mathbf{j}_{\parallel} = 0, \quad (1.43)$$

в котором поперечный ток выражается через плотность и скорость ионов и электронов в магнитосфере $\mathbf{j}_{\perp} = en(\mathbf{v}_{\perp i} - \mathbf{v}_{\perp e})$. Скорость движения частиц и их плотность находим, используя уравнения двухжидкостной гидродинамики (индекс сорта частиц опускаем):

$$\partial_t n + \text{div}(nv) = 0; \quad d_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \nabla; \quad (1.44)$$

$$mnd_t \mathbf{v} + \nabla \hat{\pi} = -\nabla p + en(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]); \quad (1.45)$$

$$d_t p + \gamma p \text{div} \mathbf{v} + (\gamma - 1) \text{div} \mathbf{q} = 0. \quad (1.46)$$

Здесь $\hat{\pi}$, \mathbf{q} – тензор вязкости и поток тепла. Поток тепла поперек магнитного поля берем в виде [1.11]

$$\mathbf{q}_{\perp} = \frac{5}{2} \frac{p}{m \omega_B} [\mathbf{e}_z, \nabla T], \quad \mathbf{e}_z \equiv \mathbf{B}/B. \quad (1.47)$$

Считая волны низкочастотными по отношению к ионной циклотронной частоте, из уравнения движения (1.45) получаем выражение для скоростей ионов и электронов в дрейфовом приближении:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_I + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad (1.48)$$

в котором $\mathbf{v}_E = (c/B^2) [\mathbf{E}, \mathbf{B}] \simeq$ электрический дрейф; $\mathbf{v}_L = (c/(eB_n)) \times [\mathbf{e}_z, \nabla p]$ – ларморовский дрейф; $\mathbf{v}_I = \omega_B^{-1} [\mathbf{e}_z, d_t (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_L)]$ – поляризационный дрейф.

Используя полученные выражения для скоростей ионов и электронов, находим поперечный ток

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{e}_z, \nabla (p_e + p_i)] + \frac{en}{\omega_{Bi}} [\mathbf{e}_z, d_t (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_L)]. \quad (1.49)$$

Подставляя (1.49) в уравнение замыкания токов (1.43) и преобразуя уравнение непрерывности электронов, уравнение баланса тепла ионов и электронов с учетом (1.47), (1.48), приходим к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{c}{B} [\mathbf{e}_z, \nabla (p_e + p_i)] \right\} + \operatorname{div} \left\{ \frac{en}{\omega_{Bi}} [\mathbf{e}_z, d_t (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_L)] \right\} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\parallel} = 0; \quad (1.50)$$

$$d_t n + n \operatorname{div} \mathbf{v}_E + \operatorname{div} n \mathbf{v}_{\parallel e} - \operatorname{div} \left(\frac{c}{enB} [\mathbf{e}_z, \nabla p_e] \right) = 0; \quad (1.51)$$

$$d_t p_i + \gamma p_i \operatorname{div} \mathbf{v}_E + \gamma p_i \operatorname{div} \mathbf{v}_{\parallel i} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{q}_{\parallel i} + \gamma \operatorname{div} \left(\frac{c}{eB} [\mathbf{e}_z, \nabla (p_i T_i)] \right) = 0; \quad (1.52)$$

$$d_t p_e + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_E + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_{\parallel e} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{q}_{\parallel e} - \gamma \operatorname{div} \left\{ \frac{c}{eB} [\mathbf{e}_z, \nabla (p_e T_e)] \right\} \simeq 0. \quad (1.53)$$

Будем интересоваться желобковыми возмущениями ($\mathbf{B} \nabla = 0$), которые в случае плазмы малого давления $\beta \ll 1$ представляют собой перемещение магнитных силовых трубок поперек магнитного поля без искажения. Для исследования желобковых колебаний в криволинейном поле удобно перейти к эйлеровым координатам x^1, x^2, x^3 , в которых магнитное поле имеет следующий вид:

$$\mathbf{B} = [\nabla x^1, \nabla x^2]. \quad (1.54)$$

В этих координатах существует только один ненулевой контрвариантный компонент магнитного поля $B^3 = g^{-1/2}$, где g — детерминант метрического тензора g_{ik} , а вектор \mathbf{B} определяется выражением $B = (g_{33} B^3 B^3)^{1/2} = (g_{33}/g)^{1/2}$. Координаты x^1, x^2 описывают смещение плазмы в поперечных к магнитному полю направлениях, если $g_{13} = g_{23} = 0$, так как в этом случае оси x^1, x^2 ортогональны оси x^3 . Поэтому в желобковых возмущениях все величины, за исключением самого магнитного поля, зависят только от поперечных координат x^1, x^2 . Используя определение удельного объема V , можно получить его выражение в эйлеровых координатах в виде интеграла вдоль силовой линии $V = \oint \sqrt{g} dx^3$. В плазме низкого давления ($\rho \ll 1$) возмущения электрического поля можно считать потенциальными: $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Переходя в системе (1.50)–(1.53) к переменным x^1, x^2, x^3 и интегрируя вдоль силовой линии магнитного поля, получаем усредненную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \{U, p_e + p_i\} + m_i n c d_t \Delta_2 \varphi + \frac{m_i o}{e} d_t \Delta_2 p_i = \\ = -\frac{1}{c} (\sqrt{g} j_{\parallel}) \Big|_{x^3=c_1}^{x^3=c_2}; \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} U \partial_t n + c \{\varphi, U_n\} + \frac{c}{e} \{U, p_e\} = \\ = -n (\sqrt{g} v_{\parallel e}) \Big|_{x^3=c_1}^{x^3=c_2}; \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} U \partial_t p_i + c U^{1-\gamma} \{\varphi, p_i U^\gamma\} - \gamma \frac{c}{e} \{U, p_i T_i\} = \\ = -\gamma p_i (\sqrt{g} v_{\parallel i}) \Big|_{x^3=c_1}^{x^3=c_2}; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} U \partial_t p_e + c U^{1-\alpha} \{\varphi, p_e U^\alpha\} + \gamma \frac{c}{e} \{U, p_e T_e\} = \\ = -\gamma p_e (\sqrt{g} U_{\parallel e}) \Big|_{x^3=c_1}^{x^3=c_2}; \quad d_t \equiv \partial_t + c \{\varphi, \dots\}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Здесь введены обозначения $U_{ik} \equiv \int g_{ik} \sqrt{g} dx^3$; $\{f, g\} \equiv \partial_i f \partial_2 g - \partial_2 f \partial_1 g$; $\Delta_2 = U_{22} \partial_1^2 + U_{11} \partial_2^2$; $\partial_1 \equiv \partial_{x^1}$; $\partial_2 \equiv \partial_{x^2}$; $j_{\parallel}, U_{\parallel e}, U_{\parallel i}$ — контрвариантные компоненты продольного тока и продольных скоростей электронов и ионов. В правых частях уравнений (1.55)–(1.58) значения продольного тока и других величин берутся на концах силовой линии

на границе с ионосферой. Продольный поток тепла на границе ионосферы и магнитосферы считается малым.

Уравнение (1.55) позволяет найти связь между равновесным давлением и равновесным продольным током:

$$c \{ U, p \} = (\sqrt{g} j_{\parallel})|_{x^3=c_2} - (\sqrt{g} j_{\parallel})|_{x^3=c_1}, \quad (1.59)$$

где $p = p_{0e} + p_{0i}$ — полное невозмущенное давление плазмы. При симметричных граничных условиях (1.59) переходит в основное уравнение магнитосферно-ионосферного взаимодействия, полученное Б.А. Тверским [1.12].

Продольный ток возникает из-за того, что полный поперечный ток с плотностью $\mathbf{j}_{\perp} = (c/B) [\mathbf{e}_z, \nabla p]$, вытекающий в силовую трубку, не равен полному поперечному току, вытекающему из нее, когда равновесное давление непостоянно на поверхностях $U = \text{const}$. Образующийся избыток заряда стекает вдоль силовой трубки в ионосферу.

Перейдем к анализу системы уравнений (1.55)–(1.58), описывающей желобковые возмущения. Для полноты исследования получим инкремент обычной желобковой неустойчивости, когда давление постоянно на поверхностях $U = \text{const}$. Считая, что зависимость возмущенных величин от времени и координат имеет вид $\sim \exp(-i\omega t + i[k_1 dx^1 + i[k_2 dx^2])$ и пренебрегая дрейфовыми эффектами, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{m_i n_0 k_{\perp}^2 U \gamma} [\mathbf{k}, \nabla U] [\mathbf{k}, \nabla (p U^{\gamma})]; \\ [A, \nabla B] &\equiv A_1 \partial_2 B - A_2 \partial_1 B, \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

где $k_{\perp}^2 = U_{22} k_1^2 + u_{11} k_2^2$. Для определенности полагаем, что равновесные величины p, U зависят только от координаты x^1 . Тогда из (1.60) получаем

$$\omega^2 = \frac{k_2^2 \partial_1 U}{m_i n_0 k_2^2} (\partial_1 p + \gamma p U^{-1} \partial_1 U) = -\Gamma^2, \quad (1.61)$$

где Γ — инкремент желобковой неустойчивости. Из (1.61) следует критерий (1.41), согласно которому неустойчивость возникает, если давление спадает достаточно быстро. В случае дипольного поля этому соответствует спадание давления плазмы от центра ловушки $\sim r^{-2.0/3}$ [1.8].

Рассмотрим теперь случай, когда критерий (1.41) не выполняется. Покажем, что и в этом случае плазма неустойчива, если поверхности постоянного давления не совпадают с поверхностями $U = \text{const}$. Аналогично ранее рассмотренной неустойчивости считаем, что величины p и U зависят от координаты x^1 , но, кроме того, градиент давления p имеет

еще компонент вдоль оси x^2 , который связан, согласно (1.59), с продольным током соотношением $\partial_2 p \partial_1 V = 2\sqrt{g} j_{\parallel}/c$. Из уравнений (1.55)–(1.58) в пренебрежении дрейфовыми эффектами находим дисперсионное уравнение желобковых колебаний при наличии равновесного продольного тока:

$$\omega = -i \frac{\Sigma_p (k'_{\perp})^2}{2m_i n_0 k_{\perp}^2 c^2} \pm i \left[\left(\frac{\Sigma_p (k'_{\perp})^2}{2m_i n_0 k_{\perp}^2 c^2} + \frac{2k_1 k_2 \sqrt{g}}{m_i n_0 k_{\perp}^2 c} j_{\parallel} + \Gamma^2 \right)^{1/2} \right], \quad (1.62)$$

где $(k'_{\perp})^2 = U^{11} k_1^2 + U^{22} k_2^2$; $U^{ik} \equiv g^{ik} \sqrt{g}$.

Анализ (1.62) проведем в двух предельных случаях. Когда проводимость Σ_p велика, интересующий нас корень уравнения (1.62) можно записать в виде

$$\omega = i \frac{m_i n_0 k_{\perp}^2 c^2}{\Sigma_p (k')^2} \left(\frac{2k_1 k_2 \sqrt{g}}{m_i n_0 k_{\perp}^2 c} j_{\parallel} + \Gamma^2 \right), \quad (1.63)$$

из которого следует, что магнитная силовая трубка может быть неустойчивой по отношению к перестановочным движениям при $\Gamma^2 < 0$. В другом предельном случае при достаточно малых значениях проводимости необходимо учитывать инерцию частиц в магнитной силовой трубке и (1.62) преобразуется к виду:

$$\omega^2 = - \left(\frac{2k_1 k_2 \sqrt{g}}{m_i n_0 k_{\perp}^2 c} j_{\parallel} + \Gamma^2 \right). \quad (1.64)$$

Максимальный инкремент неустойчивости в случае больших продольных токов

$$\gamma = \left(\pm \frac{\sqrt{g}}{cm_i n_0 \sqrt{U_{12} U_{22}}} j_{\parallel} + \Gamma^2 \right)^{1/2} \quad (1.65)$$

достигается при $k_2 = \pm (U_{22}/U_{11}) k_1$. Знак плюс или минус в (1.65) выбирается в зависимости от направления продольного тока. Если продольный ток направлен в положительном направлении оси x^3 , $j_{\parallel} > 0$, то проекции волнового вектора на оси x^1 и x^2 удовлетворяют условию $k_1 k_2 > 0$; в противоположном случае, когда ток отрицательный, выполняется соотношение $k_1 k_2 < 0$.

Если критерий обычной желобковой неустойчивости не выполняется, т.е. $\Gamma^2 < 0$, то для возникновения желобковой неустойчивости с

непостоянным давлением на поверхностях равного удельного объема необходимо, чтобы продольный ток превышал некоторое пороговое значение. Его можно оценить, используя выражение для инкремента (1.65):

$$j_{\parallel}^* = cm_i n_0 \sqrt{U_{11} U_{22}} |\Gamma^2| / \sqrt{g}. \quad (1.66)$$

При достаточно коротких длинах волн возмущений плазмы в полученных выше дисперсионных уравнениях необходимо учитывать дополнительные члены. Для их учета рассмотрим полную систему уравнений (1.55)–(1.58) в предположении малой проводимости торцов. Для простоты сначала положим $T_e \gg T_i$ и пренебрежем возмущением ионного давления $\tilde{p}_i = 0$. Линеаризуя ее, находим дисперсионное уравнение желобковых колебаний с учетом магнитодрейфовых эффектов:

$$\omega^2 - 2\gamma\omega_{Ue}\omega + \gamma\omega_{Ue}^2 + (1 - \gamma\omega_{Ue}/\omega)(\Gamma_j^2 + \Gamma^2) - \gamma\omega_{Ue}\Omega_e^2/\omega = 0, \quad (1.67)$$

где $\omega_{Ue} = cT_e k_2 \partial_1 U / (eU)$ – магнитодрейфовая частота электронов;

$$\Gamma_j^2 = \frac{2k_1 k_2 \sqrt{g}}{m_i n_0 k_{\perp}^2 c} j_{\parallel};$$

$$\Omega_e^2 = \frac{k_{\perp}^2}{m_i k_{\perp}^2} [(\gamma - 1) T_e (\partial_1 U)^2 / U + \partial_1 U \partial_1 T_e]. \quad (1.68)$$

При получении (1.68) было использовано условие $\partial_2 T_e = 0$, которое следует из уравнения баланса тепла электронов для равновесных величин. Анализ уравнения (1.67) показывает, что желобковая неустойчивость не развивается при значениях магнитодрейфовой частоты $|\omega_{Ue}|^2 \gg \Gamma_j^2 + \Gamma^2$. Сравнивая величины ω_{Ue} и Γ , находим, что стабилизация желобковой неустойчивости возникает для длин волн, меньших r_s :

$$(k_{\perp} B / U^{1/2}) r_s \gg \max(1, (R/a)^{1/2}), \quad (1.69)$$

где a – характерный размер неоднородности плазмы; R – радиус кривизны силовой линии. Для значений $\Gamma_j^2 \gg \Gamma^2$ стабилизация неустойчивости происходит при еще более коротких длинах волн, чем это определено условием (1.69). Пороговое значение продольного тока для коротковолновых возмущений больше, чем то же значение для длинноволновых возмущений, определенное (1.66), как это следует из условия возникновения желобковой неустойчивости $\Gamma_j^2 + \Gamma^2 \gg |\omega_{Ue}|^2$. Решение дисперсионного уравнения (1.67) получим для значений $\Gamma_j^2 + \Gamma^2 \gg |\omega_{Ue}|^2$. В этом случае интересующий нас корень уравнения можно

записать в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \gamma \omega_{Ue} \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\Gamma_j^2 + \Gamma^2} \right) + i(\Gamma_j^2 + \Gamma^2)^{1/2}. \quad (1.70)$$

Выражение (1.70) уточняет решение дисперсионного уравнения (1.64) на случай коротковолновых желобковых возмущений. Из (1.70) следует, что такие возмущения имеют осцилляторный характер с частотой осцилляций, равной по порядку величины электронной магнитодрейфовой частоте.

Простые аналитические выражения получаются и в случае $T_i \gg T_e$. Линеаризуя систему уравнений (1.55)–(1.58) и полагая $p_e = 0$, находим дисперсионное уравнение желобковых колебаний:

$$(\omega - \gamma \omega_{Ui})(\omega - \omega_{pi}) - \gamma \omega_{Ui} \omega_{Ti} - \gamma \omega_{Ui}^2 + (1 - \gamma \omega_{Ui}/\omega)(\Gamma_j^2 + \Gamma^2) - \gamma \omega_{Ui} \Omega_i^2/\omega = 0. \quad (1.71)$$

Здесь $\omega_{Ui} = -cT_i k_2 \partial_1 U / (eU)$; $\omega_{pi} = cT_i(k_2 \partial_1 p_i - k_1 \partial_2 p_i) / (ep_i)$; $\omega_{ni} = cT_i(k_2 \partial_1 n_0 - k_1 \partial_2 n_0) / (en_0)$; $\omega_{Ti} = \omega_{pi} - \omega_{ni}$; величина Ω_i^2 равна Ω_e^2 с заменой электронной температуры на ионную.

Анализ уравнения (1.71) усложняется наличием членов, описывающих дрейфовые эффекты из-за неоднородности плотности и температуры. Однако качественно картина поведения желобковой неустойчивости с $T_e = 0$ совпадает с ранее разобранным случаем $T_e \gg T_i$. Уравнение (1.71) не имеет комплексных корней при $(|\omega_{Ui}|^2, |\omega_{pi}|^2) \gtrsim \Gamma_j^2 + \Gamma^2$. Это означает, что желобковые возмущения с достаточно короткими длинами волн по сравнению с r_s устойчивы. Корень уравнения (1.71) с положительной мнимой частью в случае $\Gamma_j^2 + \Gamma^2 \gg (i|\omega_{Ui}|^2, |\omega_{pi}|^2)$ имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{pi} - \frac{1}{2} \omega_{Ui} \frac{\Omega_i^2}{\Gamma_j^2 + \Gamma^2} + i(\Gamma_j^2 + \Gamma^2)^{1/2}, \quad (1.72)$$

откуда следует, что действительная часть частоты неустойчивых желобковых возмущений по порядку определяется дрейфовой частотой ω_{pi} и ионной магнитодрейфовой частотой ω_{Ui} .

Представляет интерес применить полученные результаты к конфигурации дипольного магнитного поля, которое часто рассматривают как нулевое приближение к реальному магнитному полю Земли. В качестве эйлеровых координат возьмем следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= k_0 \cos^2 \theta / r; \\ x^2 &= \varphi; \\ x^3 &= \sin \theta / r^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

где φ — восточная геомагнитная долгота; θ — геомагнитная широта;

r – радиальное расстояние (см. [1.9]). Считается, что магнитное поле Земли образуется точечным диполем с моментом k_0 , направленным на юг и находящимся в начале координат. В этих координатах вычисляем следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} U &= 0,91 k_0^3 (x^1)^{-4}; & U_{11} &= 0,6 k_0^5 (x^1)^{-8}; \\ U_{22} &= 0,68 k_0^5 (x^1)^{-6}; & U^{11} &= k_0^3 L^{-3} (x^1)^{-2}; \\ U^{22} &= L^{-2} k_0^3 (x^1)^{-4} (4L - 3)^{-1}; & U'_{11} &= 0,8 (x^1)^4 L^5 / k_0^5; \\ U'_{22} &= 3,2 (x^1)^6 L^5 / k_0^5. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

В физике магнитосферы положение магнитной силовой линии принято характеризовать безразмерным параметром L , который связан с координатой x^1 соотношением $x^1 = k_0 / (LR_E)$, где R_E – радиус Земли. Полагая, что давление плазмы в магнитосфере распределено по закону $p = p_0 (L/L_0)^{-n}$, где p_0 – давление на магнитной силовой линии с параметром L_0 , и используя (1.42), находим инкремент обычной желобковой неустойчивости при $\gamma = 5/3$:

$$\Gamma^2 = \frac{6k_0^2 T (n - 20/3)}{m_i L^2 R_E^2 [k_2^2 + (k_0^2 / L^2 R_E) k_1^2]}, \quad (1.73)$$

откуда следует хорошо известный результат для дипольного поля, что плазма неустойчива относительно желобковых возмущений при $n > 20/3$. По формуле (1.59) определяем плотность стационарного продольного тока

$$j_{\parallel} = -1,8 c L^4 (4L^2 - 3L)^{1/2} \partial_2 p_0 / (R_E B_{\text{экв}}), \quad (1.76)$$

где $B_{\text{экв}} = k_0 / R_E^3$ – магнитное поле на экваторе Земли.

Инкремент желобковой неустойчивости с непостоянным давлением на поверхностях равного удельного объема (1.64) в дипольном поле имеет вид:

$$\Gamma_j^2 = \frac{3,4 k_1 k_2 B_{\text{экв}}^2 R_E}{c m_i n_0 L^7 (4L^2 - 3L)^{1/2} [k_2^2 + (k_0^2 / (L^2 R_E^2)) k_1^2]} j_{\parallel}. \quad (1.77)$$

Максимальный инкремент достигается при $k_2 = \pm k_0 k_1 / (LR_E)$ и равен

$$\Gamma_j^2 = \frac{1,7 B_{\text{экв}}}{m_i n_0 c L^6 (4L^2 - 3L)^{1/2} R_E} |j_{\parallel}|. \quad (1.78)$$

Наконец, приведем выражение для порогового значения продольного тока (1.6б) и магнитодрейфовой частоты:

$$j_{\parallel}^* \frac{0,63 m_i n_0 c L^6 (4L^2 - 3L)^{1/2} R_E}{B_{\text{ЭКВ}}} |\Gamma^2|; \quad (1.79)$$

$$\omega_U = -4cTk_2 L / (eB_{\text{ЭКВ}} R_E^2). \quad (1.80)$$

Полученные формулы позволяют оценивать различные величины, характеризующие магнитосферу Земли.

1.5. ВОЛНЫ РОССБИ В АТМОСФЕРЕ

Волны в атмосфере и океане имеют сходство с волнами в плазме. Например, Р.З. Сагдеев отметил сходство между ионно-звуковыми и магнитозвуковыми солитонами, с одной стороны, и солитонами длинных гравитационных волн на воде — с другой [0.1]. Особый интерес представляет сходство волн Россби в атмосфере с дрейфовыми волнами в плазме. Волны Россби являются продолжением ветви звуковых и длинных гравитационных волн. Когда длина звуковых волн в атмосфере больше ее глубины, сжимаемость воздуха становится несущественной. Роль сжимаемости начинает играть изменение эффективной глубины в гравитационном поле. При этом звуковая ветвь плавно переходит в ветвь длинных гравитационных волн. В гравитационных волнах колебания частиц происходят вдоль горизонтального компонента градиента возмущения давления. Различают баротропные и внутренние моды. В баротропной моде фаза осциллирующей частицы не зависит от высоты, а во внутренней она существенно меняется с высотой. Баротропные моды в атмосфере и океанах описываются системой уравнений мелкой воды с добавлением силы Кориолиса:

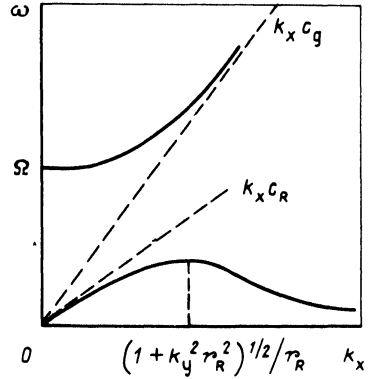
$$d_t \mathbf{v} = -\nabla_{\perp} (gH) + \Omega [\mathbf{v}, \zeta]; \quad (1.81)$$

$$\partial_t H + \text{div } \mathbf{v}H = 0; \quad d_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \nabla_{\perp}, \quad (1.82)$$

где \mathbf{v} — горизонтальная составляющая скорости атмосферы; $\Omega = 2\omega_0 \sin \alpha$ — частота (параметр) Кориолиса; α — широтный угол; ω_0 — угловая скорость вращения планеты; H — эффективная глубина атмосферы; g — ускорение свободного падения; ζ — единичный вектор вдоль вертикали.

В этой модели атмосфера представляется в виде слоя несжимаемой мелкой жидкости глубины H . Исследуем спектр малых колебаний системы (1.81), (1.82). Представим $H = H_0 (1 + h)$, где H_0 — невозмущенная глубина, которая может слабо зависеть от координат. Линеаризуем (1.81), (1.82) относительно h и \mathbf{v} и введем локальную систему координат x, y, z осью x , направленной на восток, осью y — на север и осью z — по вертикали. Все возмущенные величины считаем меняющимися в пространстве и во времени по закону $\sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Для

Р и с. 1.2. Спектр частот волн в мелкой вращающейся воде. Верхняя ветвь, соответствующая инерционным волнам, отделена от нижней ветви (волны Россби) широкой щелью. При больших k инерционные волны переходят в длинные гравитационные волны, бегущие со скоростью c_g



применимости этого приближения необходимо, чтобы длина волны в горизонтальном направлении была достаточно малой и находилась в интервале $k_{\perp} H_0 \ll 1 \ll k_{\perp} R$, где R – радиус планеты (характерный размер неоднородности). Тогда из (1.81), (1.82) получим:

$$\omega(1 + k_{\perp}^2 r_R^2 - \omega^2 / \Omega^2) = k_x v_R, \quad (1.83)$$

где $r_R = c_g / \Omega$ – радиус Россби (радиус деформации); $c_g = (g H_0)^{1/2}$; $v_R = 0,5 H_0 \omega_0 (1 + \kappa \sin \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$; $\kappa = d \ln H_0 / (d \sin \alpha)$ – скорость Россби (дрейфовая скорость).

Уравнение (1.83) описывает две ветви, разделенные щелью (рис. 1.2). Ветвь с частотами, много большими Ω , соответствует длинным гравитационным волнам на мелкой воде

$$\omega^2 = k_{\perp}^2 c_g^2. \quad (1.84)$$

С уменьшением частоты все существенней становится влияние силы Кориолиса. Под ее действием направление осциллирующих частиц отклоняется от градиента давления. При $\omega \sim \Omega$ из (1.83) получается дисперсионное уравнение инерционных (гироскопических) волн в мелкой вращающейся атмосфере:

$$\omega = \Omega(1 + k_{\perp}^2 r_R^2 / 2). \quad (1.85)$$

Эти частоты характерны для тайфунов в тропических широтах. Они аналогичны циклотронным волнам в плазме [1.13].

Наконец, в пределе, когда частота становится много меньше Ω , колебания частиц становятся почти поперечными волновому вектору. В них вихревая часть скорости много больше потенциальной. Тогда из (1.83) имеем:

$$\omega = k_x v_R / (1 + k_{\perp}^2 r_R^2). \quad (1.86)$$

Волны, описываемые этим уравнением, носят имя шведского геофизика Россби, первым оценившим их роль в формировании погоды в атмосфере и океанах. В последнее время интерес к этим волнам возрос в связи с попытками моделирования различных физических явлений: ринг Гольфстрима [1.14], атмосферная блокировка [1.15], Большое Красное Пятно Юпитера [1.16].

Во внутренних модах фаза колебаний зависит от высоты. Поэтому в них необходимо учесть неоднородность атмосферы по вертикали и вертикальный компонент скорости. Они описываются более сложными уравнениями:

$$d_t v_{\perp} = - \nabla_{\perp} p / \rho + \Omega [v_{\perp}, \xi]; \quad (1.87)$$

$$\partial_z p = -\rho g; \quad (1.88)$$

$$d_t p = -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad (1.89)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.90)$$

где "1" по-прежнему означает горизонтальную составляющую. В принятом здесь приближении низких частот давление определяется в гидростатическом приближении (1.88). Считается, что колебания давления происходят адиабатически. Это справедливо, когда период колебаний T много меньше характерного времени выравнивания температуры из-за теплопроводности. Требуется также условие $\Omega T \gg 1$.

Аналогично баротропным модам из (1.87)–(1.90) получаем дисперсионное уравнение внутренних мод в квазиклассическом приближении:

$$\omega = k_x v_R / (k_{\perp}^2 r_R^2 + k_z^2 r_i^2), \quad (1.91)$$

где k_z – вертикальное волновое число, принимающее дискретные значения, которые определяются из граничных условий; $r_i \equiv r_R \Omega / N$ – так называемый внутренний радиус Россби, $N^2 = g/H_0 - g^2/c_g^2$ – квадрат частоты Брента–Вейсяля.

В простейшем случае $k_z = \pi m / (2H_0)$, где m – целое число.

Из (1.91) видно, что фазовые скорости внутренних мод по горизонтали много меньше баротропных и направлены на запад. Для земной атмосферы $N \approx 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\Omega \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, поэтому $\Omega/N \ll 1$. Радиус Россби велик ($r_R \approx 2000 \text{ км}$), в то время как внутренний радиус Россби составляет 30 км. Поэтому внутренние моды легко умещаются в земной атмосфере и в океанах.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ТИПА**2.1. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ**

Основу современной теории нелинейных волн составляют модельные уравнения. Наиболее известное из них — уравнение Кортевега—де Фриза (УКдФ), полученное для описания нелинейных волн на мелкой воде.

В дальнейшем оказалось, что это же уравнение является достаточно общей моделью для одномерных нелинейных волн акустического типа во многих диспергирующих средах, таких как плазма или твердое тело. Было показано, что целый ряд ветвей колебаний (ионно-звуковые и магнитозвуковые волны в плазме, фононы в твердых телах и жидком гелии, магнитоупругие волны в антиферромагнетиках и другие) описывается УКдФ.

Основной идеей при получении подобных модельных уравнений являлась схема Кортевега — де Фриза, согласно которой при разложении с целью упрощения волновых уравнений общего вида в ряд теории возмущений параметры нелинейности и дисперсии считаются малыми одного порядка. Благодаря этой идее стали универсальными такие понятия, как солитон, самофокусировка, коллапс, чисто квазичастиц, полная энергия волны и др. Указанный метод двойного разложения долгое время не пользовался популярностью из-за необычности и кажущейся трудности исследования получаемых упрощенных уравнений.

Интерес к УКдФ возродился в связи с появившейся в 1965 г. работой Забуски и Крускала [0.2], где были открыты необычные свойства решений УКдФ. Они численно показали, что в решениях этого уравнения выделяются уединенные волны, не взаимодействующие друг с другом, которые из-за сходства с частицами были названы солитонами. В 1967 г. была опубликована работа Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [2.1], где было показано, что решение УКдФ может быть сведено к решению линейных уравнений. Этот способ был развит Лэксом [2.2], В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом [2.3] и получил название метода обратной задачи рассеяния (ОЗР).

С начала 70-х годов стали предприниматься попытки выхода за одномерное приближение. Используя идею получения параболического уравнения Леонтовича и УКдФ, в [0.3] было выведено уравнение, которое описывает распространение слабонеодномерных акустических волн в диспергирующей среде. Оно имеет ту же степень универсальности, что и УКдФ. Приведем вывод этого уравнения на примере ионно-звуковых волн в изотропной плазме:

Плазму можно считать изотропной, если влияние магнитного поля мало. Единственная ветвь акустических колебаний, возможная в таких

условиях, — это ионно-звуковые волны в диапазоне частот $\omega_{Bi} \ll \omega < \omega_{pi}$. В гл. 1 рассматривались такие волны бесконечно малой амплитуды. Здесь исследуем влияние эффектов конечной амплитуды. Первые нелинейность в ионно-звуковых волнах была исследована в [0.1]. В таких колебаниях электроны распределены по Больцману

$$n_e = n_0 \exp \Phi, \quad \Phi \equiv e\varphi/T_e, \quad (2.1)$$

а уравнения движения и непрерывности ионов имеют вид

$$d_t \mathbf{v} = -c_s^2 \nabla \Phi + \omega_{Bi} [\mathbf{e}_z, \mathbf{v}]; \quad (2.2)$$

$$\partial_t n_i + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}) = 0; \quad d_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \nabla. \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{v} — гидродинамическая скорость ионов. Давлением ионов, как и ранее, пренебрегается из-за малости T_i .

Отклонение от зарядовой нейтральности, существенное при малых длинах волн, описывается уравнением Пуассона:

$$r_D^2 \nabla^2 \Phi = (n_e - n_i)/n_0. \quad (2.4)$$

Аналогично гл. 1 рассмотрим сначала влияние нелинейности на распространение высокочастотного ионного звука, в котором частоты много больше ω_{Bi} . Тогда последним членом в (2.2) можно пренебречь и плазма становится изотропной. Пусть имеется пакет, характерный размер которого в направлении z много меньше, чем в других направлениях. В принятом приближении при получении нелинейных поправок в упрощенном виде эффектами дисперсии и дифракции волнового пакета можно пренебречь. Достаточно учесть конечность только компонента скорости ионов вдоль z , а другими компонентами можно пренебречь. Тогда из (2.2) и (2.3) имеем:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \partial_z \mathbf{v} = -c_s^2 \partial_z \Phi, \quad v \equiv v_z; \quad (2.5)$$

$$\partial_t \ln n_i + v \partial_z \ln n_i + \partial_z v = 0. \quad (2.6)$$

В уравнении (2.4) левая часть описывает дисперсию ионного звука, которую считаем малой. Поэтому при вычислении нелинейных поправок колебания можно считать квазинейтральными:

$$\ln n_i = \ln n_e = \Phi, \quad (2.7)$$

где использовано (2.1). Ищем v и Φ как функции вида

$$v = v(\xi, \tau, x, y); \quad \xi \equiv z - c_s t; \quad \tau = t. \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем использовать параболическое приближение, считая, что зависимость от первого аргумента гораздо сильнее, чем от остальных.

В этих переменных (2.5) и (2.6) перепишутся в виде:

$$\partial_\tau \nu + \nu \partial_\xi \nu = c_s \partial_\xi (\nu - c_s \Phi); \quad (2.9)$$

$$\partial_\tau \Phi + \nu \partial_\xi \Phi = -\partial_\xi (\nu - c_s \Phi); \quad (2.10)$$

В нулевом приближении с учетом малости амплитуды $\Phi \ll 1$, откуда имеем $\nu \simeq c_s \Phi$. Подставляя это соотношение в малые члены из (2.9) и (2.10), получаем

$$\partial_\tau \Phi + c_s \Phi \partial_\xi \Phi = 0. \quad (2.11)$$

В этом уравнении учтена только нелинейность, но опущены дисперсионные и дифракционные члены, которые в общем случае того же порядка, что и нелинейные. Эти члены учитывались независимо в линейном приближении в уравнении (1.14). Объединяя (1.14) и (2.11), получаем одно уравнение:

$$\partial_\xi (\partial_\tau \Phi + c_s \Phi \partial_\xi \Phi - (c_s/r_D^2/2) \partial_\xi^3 \Phi) = -(c_s/2) \nabla_\perp^2 \Phi. \quad (2.12)$$

В безразмерном виде оно принимает следующую форму:

$$\partial_z (\partial_t \Phi + \Phi \partial_z \Phi + \partial_z^3 \Phi) = \sigma \nabla_\perp^2 \Phi. \quad (2.13)$$

Это уравнение известно как уравнение Кадомцева–Петвиашвили (УКП). Здесь $\sigma = \pm 1$ определяет знак дисперсии. К этому уравнению сводится большой класс уравнений акустических волн как в изотропных, так и во многих анизотропных средах. В случае ионного звука $\sigma = -1$, что соответствует средам с отрицательной дисперсией. Положительная дисперсия характерна для капиллярных волн на поверхности жидкости и при определенных условиях – для фононов в жидком гелии. В холодной плазме с $\beta \ll 1$ примером таких волн является быстрый магнитный звук с частотами, много меньшими циклотронной, при распространении под косым углом к магнитному полю. В случае, когда зависимостью от x, y можно пренебречь, т.е. если пакет одномерный, уравнение (2.13) приводится к УКдФ.

В одномерном случае знак дисперсии не играет большой роли, так как его можно изменить преобразованием подобия. Однако в (2.13) знак дисперсии делит уравнение на два класса, которые не переходят друг в друга.

2.2. ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УКП И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Уравнение (2.13) имеет решение в виде одномерных солитонов:

$$\Phi_0 = \frac{3u}{\text{ch}^2(\xi/\sqrt{2u})}, \quad (2.14)$$

где $u > 0$ – скорость его перемещения; $\xi \equiv z - ut$. Одномерные решения

общего вида, зависящие только от z и t , совпадают с решениями УКдФ и были найдены методом ОЗР [2.2]. В [2.3, 2.4] указывалось на возможность получения в аналитическом виде двумерных решений УКП. Двумерные решения УКП общего вида были найдены В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом [2.3] с помощью новой модификации метода ОЗР. В частном случае из них следовало решение в виде двух пересекающихся одномерных солитонов. Солитонные решения УКдФ устойчивы при любом знаке дисперсии. В [0.3] был исследован вопрос об устойчивости этих решений в двумерном пространстве, когда они описываются УКП. Для этого была проведена линеаризация безразмерного уравнения (2.13) относительно малых возмущений φ – точного решения (2.14). Это привело к уравнению

$$\partial_z [\partial_t \varphi + \partial_z (\varphi \Phi_0) + \partial_z^3 \varphi] = \sigma \nabla_{\perp}^2 \varphi. \quad (2.15)$$

Учитывая выражение для Φ_0 , ищем решение (2.15) в виде

$$\varphi = \psi(\xi) \exp(-i\omega t + ikx), \quad \xi \equiv z - ut. \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.15), получаем уравнение относительно ψ :

$$L \psi = i\omega \partial_{\xi} \psi - \sigma k^2 \psi, \quad (2.17)$$

где оператор L определен как

$$L = \partial_{\xi}^2 (-u + \Phi_0 + \partial_{\xi}^2). \quad (2.18)$$

Здесь считаем, что $k^2 \simeq \omega^2 \ll \omega$. Этим мы ограничиваемся рассмотрением длинноволновых низкочастотных возмущений. Тогда возможно представление ψ в виде ряда по степеням малого параметра ω : $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$. Подставляя это разложение в (2.17) и приравнивая члены одного порядка, получаем цепочку уравнений:

$$\left. \begin{aligned} L \psi_0 &= 0; \\ L \psi_1 &= i\omega \partial_{\xi} \psi_0; \\ L \psi_2 &= i\omega \partial_{\xi} \psi_1 - \sigma k^2 \psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Решение первого уравнения имеет вид:

$$\psi_0 = \partial_{\xi} \Phi_0. \quad (2.20)$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (2.19) и решая его, получаем

$$\psi_1 = i\omega \partial_u \Phi_0. \quad (2.21)$$

Наконец, с помощью (2.21) из (2.19) получаем

$$L \psi_2 = -\sigma k^2 \partial_{\xi} \Phi_0 - \omega^2 \partial_u \partial_{\xi} \Phi_0. \quad (2.22)$$

Это уравнение неоднородно и в общем случае имеет конечные решения не при любой правой части. Известно, что для наличия конечных решений правая часть (2.22) должна быть ортогональна решениям уравнения, сопряженного уравнению (2.22) без правой части. Умножая (2.22) на Φ_0 и интегрируя по ξ , получаем, что левая часть обращается в нуль, а правая дает дисперсионное уравнение малых колебаний солитона:

$$\omega^2 = -\sigma k^2 \partial_u (\ln \int \Phi_0^2 d\xi). \quad (2.23)$$

Вспользуемся явным выражением солитонного решения (2.14), что дает

$$\omega^2 = -3\sigma k^2 / u, \quad u > 0. \quad (2.24)$$

Из (2.24) видно, что при $\sigma = -1$ солитон устойчив, а при $\sigma = +1$ неустойчив. Таким образом, в средах с положительной дисперсией одномерные солитоны неустойчивы, а в средах с отрицательной дисперсией устойчивы. Приведенный здесь метод исследования устойчивости не вполне строг, так как уже третье приближение растет в пространстве при удалении от солитона. Строгое рассмотрение устойчивости можно провести методом ОЗР [0.4]. При этом подтверждаются полученные результаты и показывается, что неустойчивость имеет место только при длинах волн, больших ширины солитона. Это дает повод предполагать, что в двумерном пространстве в средах с положительной дисперсией возможны устойчивые двумерные солитоны. Такие солитонные решения УКП были найдены численно в [2.5], а затем аналитически в [2.6]. В [2.6] были получены и решения в виде набора произвольного числа различных солитонов. Если искать решение (2.13) в виде солитона,

$$\Phi_0 = u \psi(\xi, \eta); \quad \xi \equiv (z - ut)\sqrt{u}; \quad \eta \equiv ux, \quad (2.25)$$

то после подстановки (2.25) в (2.13) получим уравнение двумерного солитона:

$$\sigma \partial_\eta^2 \psi + \partial_\xi^2 \psi = \partial_\xi^4 \psi + (1/2) \partial_\xi^2 \psi^2. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) представляет собой уравнение нелинейной струны с дисперсией, где роль времени играет $t = i\eta/\sqrt{\sigma}$. В случае $\sigma = 1$ время чисто мнимое. Легко проверить прямой подстановкой, что при $\sigma = 1$ (2.26) имеет двумерное солитонное решение вида

$$\psi = \frac{24(\eta^2 - \xi^2 + 3)}{(\eta^2 + \xi^2 + 3)^2}. \quad (2.27)$$

В [2.7, 2.8] получено решение (2.26) при $\sigma = 1$ в виде N -солитонной группы с помощью подстановки Хироты [2.9]:

$$\psi = 12 \partial_\xi^2 \ln \text{Det } M, \quad (2.28)$$

где

$$M_{ij} = \delta_{ij} \pm m_{ij} \exp(\theta_i + \theta_j). \quad (2.29)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера; θ_i — фаза i -го солитона; индексы i и j принимают значения от 1 до N , $2\theta_i = k_i(\xi + \kappa_i\eta)$; $\kappa_i^2 = k_i(k_i^2 - 1)$; $m_{ij}^2 = -\sigma k_i k_j / [-7k_i k_j + 2(k_i - k_j)^2 + \sqrt{(k_i^2 - 1)(k_j^2 - 1)} + 1]$.

Из (2.29) можно получить большое разнообразие стационарных мультисолитонных решений двумерного УКП. В частности, (2.27) получается при $N = 2$ в пределе $k_1 \rightarrow 0$, $k_2 \rightarrow 0$, а $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_2 \rightarrow i$. При этом $\text{Det } M \rightarrow \eta^2 + \xi^2 + 3$. Такие решения в двумерном пространстве неустойчивы, однако отдельный солитон (2.27) устойчив. Рассмотрим устойчивость этого решения в трехмерном пространстве. Здесь существуют две возможности. Дифракционная добавка от третьей координаты u в изотропной среде имеет тот же знак, что и от x , а в анизотропных средах (например, в антиферромагнетиках) знак может быть противоположным. В первом случае доказательство неустойчивости проводится так же, как и в случае одномерного солитона. Однако во втором случае, если следовать этой же схеме, неустойчивость солитона не обнаруживается. Это тем не менее не доказывает, что солитон устойчив, поскольку данный метод не охватывает все виды возможных возмущений солитона. Поэтому рассмотрим этот случай по другой схеме, предложенной в [2.10, 2.11]. Перепишем уравнение (2.13) в виде с явным учетом анизотропии дифракции:

$$\partial_z (\partial_t \Phi + \Phi \partial_z \Phi + \partial_z^3 \Phi) = \partial_x^2 \Phi - \partial_y^2 \Phi. \quad (2.30)$$

При $\partial_y \Phi = 0$ (2.30) имеет решение в виде двумерного солитона, описываемого уравнением (2.26) при $\sigma = 1$. Рассмотрим уравнение малых возмущений φ этого решения:

$$\partial_z (\partial_t \varphi + \partial_z (\varphi \Phi_0) + \partial_z^3 \varphi) = \partial_x^2 \varphi - \partial_y^2 \varphi, \quad (2.31)$$

где Φ_0 дается (2.27).

Ищем решение в виде

$$\varphi = \psi(\xi, x) \exp(-i\omega t + ik_y u), \quad \xi \equiv z - ut. \quad (2.32)$$

Подставляя (2.32) в (2.31), получаем уравнение относительно $\psi(\xi, x)$ вида (2.17), где оператор L двумерен:

$$L = \partial_\xi^2 (-u + \Phi_0 + \partial_\xi^2) - \partial_x^2. \quad (2.33)$$

По-прежнему считаем, что $\omega \sim k$ мало и ищем решения в виде ряда (2.16) по степеням малого параметра. Тогда получаем цепочку уравнений (2.17), (2.19) с оператором (2.33). В отличие от одномерного случая в нулевом приближении имеем два локализованных решения: (2.20) и

$$\psi_0 = \partial_x \Phi_0. \quad (2.34)$$

Если решение нулевого приближения взять в виде (2.20), то получим, что спектр этой моды действителен. Это означает, что солитон устойчив относительно возмущений, антисимметричных по ξ и симметричных по x . Рассмотрим возмущения с другой симметрией (2.34). Подставляя (2.34) в (2.19), получаем

$$\psi_1 = -(i\omega/2)x \partial_\xi \Phi_0. \quad (2.35)$$

Используя (2.35), из (2.19) получаем

$$L \psi_2 = (\omega^2 x/2) \partial_\xi^2 \Phi_0 + k^2 \partial_x \Phi_0. \quad (2.36)$$

Так же, как и в случае одномерного солитона, из условия конечности ψ_2 получаем дисперсионное уравнение, описывающее спектр малых колебаний двумерного солитона в анизотропной среде:

$$\omega^2 = -4k^2 \int (\partial_x \Phi_0)^2 d\xi dx / \int (\partial_\xi \Phi_0)^2 d\xi dx. \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что двумерный солитон УКП в трехмерном пространстве неустойчив независимо от того, положителен или отрицателен знак дисперсии по третьей координате.

В отличие от результатов предыдущего рассмотрения, где было получено, что неустойчивость одномерного солитона в двумерном пространстве определяется знаком дисперсии, здесь неустойчивость в трехмерном пространстве имеет место при любом знаке дисперсии. Это связано с тем, что малые собственные колебания двумерного солитона имеют две собственные моды колебаний с различной симметрией.

2.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ УКП. КОЛЛАПС И САМОФОКУСИРОВКА

В [2.5] найдено, что УКП в средах с отрицательной дисперсией имеет двумерные и трехмерные солитонные решения. Поскольку показано, что двумерные решения в трехмерном пространстве неустойчивы, представляет интерес исследование устойчивости трехмерных решений. Отметим, что трехмерное УКП сохраняет следующие интегралы движения:

$$P = \int \Phi^2 d^3x; \quad (2.38)$$

$$H = \int [(\partial_\xi \Phi)^2 + (\sigma \nabla_\perp \mu)^2 - (2/3)\Phi^3] d^3x, \quad (2.39)$$

где $\partial_\xi \mu = \Phi$; P имеет смысл импульса волнового пакета.

С помощью интегралов (2.38) и (2.39) УКП можно записать в гамильтоновой форме:

$$\partial_t \Phi = \partial_z \delta H / (\delta \Phi). \quad (2.40)$$

Поэтому H можно назвать гамильтонианом УКП.

Можно было бы надеяться на устойчивость трехмерных солитонов, если бы H было ограничено снизу при условии постоянства P . Покажем, что это не имеет места. Пусть трехмерное солитонное решение уравнения (2.13) имеет вид $\mu = f(\xi, r)$, где ξ, r — цилиндрические координаты. Введем новую функцию

$$g = (1 + \xi) f [(1 + \eta)^2 \xi, (1 + \xi)(1 + \eta)r]. \quad (2.41)$$

Здесь ξ, η — некоторые малые числа, моделирующие растяжения солитона, такие, что при подстановке g в P импульс остается неизменным. Подставляя (2.41) в гамильтониан H , видим, что он является функцией ξ и η :

$$H \simeq H_0 + A_1 \xi + A_2 \eta + B_{11} \xi^2 + 2B_{12} \xi \eta + B_{22} \eta^2 + \dots \quad (2.42)$$

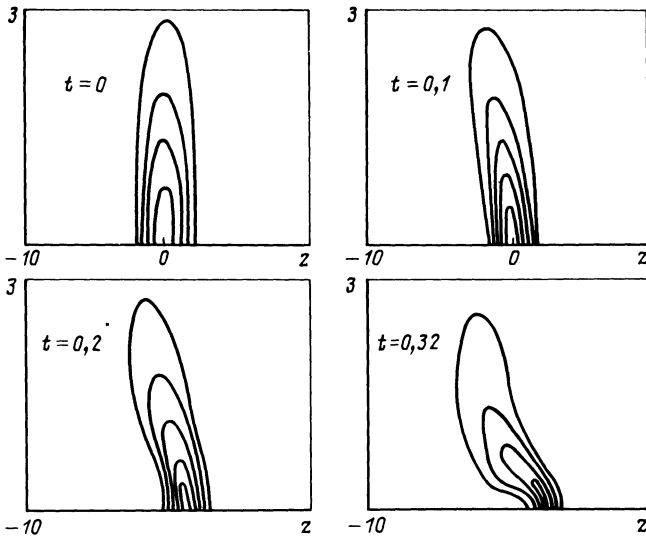
Если f есть солитонное решение, то оно осуществляет экстремум H при фиксированном P . Это видно из того, что уравнение солитона (2.13) совпадает с уравнением Эйлера для функционала $L = H + \lambda P$. H_0 на экстремуме должно быть $A_1 = A_2 = 0$. Непосредственным вычислением можно показать, что

$$B_{11} = 10I; B_{12} = -8I; B_{22} = 2I, \quad (2.43)$$

где $I = \int (\partial_r f)^2 d^3x$.

Таким образом, квадратичная форма (2.42) ввиду (2.43) не является положительно определенной. Поэтому солитонное решение суть седловая точка в пространстве функции. Если допустить, что H и P — единственные интегралы трехмерного УКП, то отсюда следует, что трехмерные солитонные решения УКП неустойчивы.

Приведенный здесь метод рассмотрения неустойчивости солитонов принадлежит Дерику [2.12]. Так как в трехмерном пространстве при фиксированном P гамильтониан не ограничен снизу, что следует из (2.42), то он может принимать любые значения, в том числе и отрицательные. Как было показано в [2.13], при $H > H_c$ (где $H_c = uP$ — значение гамильтониана на трехмерном солитонном решении) преобладает тенденция к расплыванию волнового пакета, а при $H < H_c$ возможно его самосжатие, сопровождающееся бесконечным ростом амплитуды (при фиксированных H и P). Такое явление называют коллапсом. Оно имеет место только при положительной дисперсии. Это было продемонстрировано с помощью численного счета [2.13]. Результаты численного счета приведены на рис. 2.1. Видно, что центральная часть волнового пакета начинает отставать от периферии. При этом наблюдалось интенсивное излучение из каверны, что приводило к уменьшению H и P . В принципе такое излучение могло бы остановить коллапс. Однако, как оказалось, при излучении H уменьшается быстрее, чем P . Поэтому излучение усиливает коллапс. При распространении звукового пучка в средах с положительной дисперсией возможен еще один интерес-

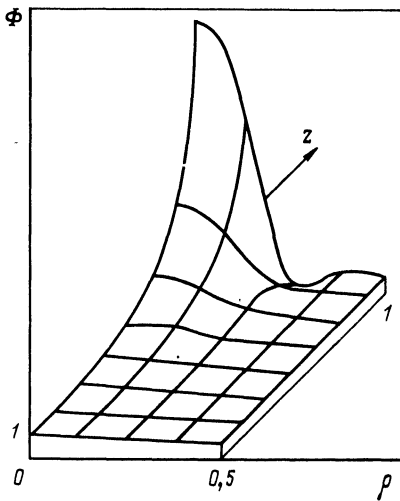


Р и с. 2.1. Линии уровня функции $\Phi(z, r_{\perp})$ в последовательные моменты времени. Амплитуда волнового пакета за время $t = 0,32$ увеличилась в 7 раз. При $t = 0$ амплитуда волнового пакета равнялась 4

ный эффект — самофокусировка, который также можно описать УКП. При самофокусировке нелинейное самосжатие преобладает над дифракционным расплыванием пучка. В результате уменьшения площади сечения пучка его интенсивность дорастает до очень больших значений. Как было указано в [2.14, 2.15], эффект самофокусировки звука может иметь место в твердых телах с особо сильной нелинейностью. К ним относятся антиферромагнетики с сильным магнестрикционным взаимодействием, которое приводит к большой нелинейности упругой подсистемы кристалла [2.16]. В большинстве же других твердых тел диссипативные эффекты с ростом амплитуды звука проявляются сильнее, чем упругонелинейные. Экспериментальные оценки коэффициентов нелинейности в антиферромагнетиках были получены в [2.14, 2.16] и др.

Самофокусировка может иметь место и в плазме при распространении пучка магнитозвуковых волн под углом к магнитному полю, не слишком близким к нулю и $\pi/2$. Для описания этого случая можно воспользоваться УКП в форме, удобной для решения задач с начальными условиями. Для исследования самофокусировки необходимо вывести упрощенное уравнение, пригодное для задач с граничными условиями.

Пусть на границе $z = 0$ задана амплитуда $\Phi = \Phi_0(t, x, y)$ как функция времени и x, y . В отсутствие дисперсии и дифракции такое возмущение



Р и с. 2.2. Рельеф самофокусирующегося пучка звуковых волн, описываемого уравнением (2.45). На границе $z = 0$ амплитуда звука задавалась в виде $\Phi = \exp(-\rho^2)$ в безразмерных единицах

распространялось бы вдоль z согласно соотношению

$$\Phi = \Phi_0(\tau, x, y), \quad \tau \equiv t - z/c_A. \quad (2.44)$$

Учтем в этом выражении нелинейность, дисперсию и дифракцию как малые поправки. Действуя как при выводе УКП в задачах с начальными

условиями, введем слабую зависимость (2.44) от z . Тогда получим, что Φ описывается уравнением

$$\partial_\tau(\partial_z \Phi + \Phi \partial_\tau \Phi + \partial_\tau^2 \Phi) = \sigma \nabla_\perp^2 \Phi. \quad (2.45)$$

Это уравнение совпадает с УКП при перестановке аргументов и описывает распространение волны направо от плоскости $z = 0$, где задается соответствующее граничное условие. Самофокусировка как и коллапс происходит только при $\sigma > 0$. Отметим отличие самофокусировки от коллапса. В первом случае задаются граничные условия, локализованные по x , y и периодические по времени, а во втором задаются начальные условия, локализованные по всем координатам. Поэтому при самофокусировке возможен режим в виде стационарного сжимающегося волнового пучка. Однако из-за возможной неустойчивости этот режим из стационарного может перейти в пульсирующий с хаотическим распределением параметров.

В стационарном режиме возможно дальнейшее упрощение задачи с помощью перехода к укороченным уравнениям Уизема [2.17], что сделано в [2.18]. На рис. 2.2 приводится ход самофокусировки при удалении от источника в рамках УКП в приближении Уизема. К сожалению, в [2.18] ошибочно принималось, что магнитный звук имеет положительную дисперсию и при распространении поперек магнитного поля. На самом же деле, как отмечалось в [2.19], при распространении поперек магнитного поля в интервале углов $\alpha < \sqrt{\beta}$ дисперсия магнитного звука отрицательна и самофокусировка не происходит.

2.4. МЕТОД СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ДЛЯ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ

Упрощенные уравнения в стационарном случае приводятся к уравнениям в частных производных, в которые нелинейность обычно входит простым образом. В не одномерном случае их, как правило, не удается решить аналитически. Однако в большинстве случаев легко можно определить, имеет данное уравнение солитонное решение или нет. Общая математическая теория этих вопросов в случае не одномерных задач, если они относятся к неинтегрируемым, пока не разработана. В [2,5] предложен простой алгоритм, позволяющий найти солитонное решение. По этому алгоритму легко получить такое решение численным методом. К сожалению, с его помощью не всегда удастся определить, является ли локализация решения экспоненциальной или степенной. В [2,5] указано, что с помощью преобразований Фурье или Фурье—Бесселя уравнения солитонов приводятся к однородному нелинейному интегральному уравнению вида

$$f = I [f, \lambda]. \quad (2.46)$$

Здесь I — нелинейный интегральный оператор, действующий на f , а λ — некоторое собственное число задачи. Оно определяется из условия, что уравнение (2.46) должно иметь достаточно гладкое решение, стремящееся к нулю на бесконечности.

В системах без диссипации с одной определенной степенью нелинейности λ удастся исключить преобразование подобия. Если же мы имеем активную среду, в которой солитон поддерживается за счет неустойчивости, то λ не удастся исключить и оно является важным параметром задачи. Такие солитоны рассматривались в [2.20] (см. также § 3.4, где рассмотрены ленгмюровские кавитоны). Здесь рассмотрим пример уравнения солитона, получаемого из двумерного УКП. Оно после преобразования подобия приводится к виду:

$$(\partial_{\xi}^2 + \partial_{\eta}^2 - \sigma \partial_{\xi}^4) \Phi = \partial_{\xi}^2 \Phi^2, \quad \sigma = \pm 1. \quad (2.47)$$

Представим Φ в виде интеграла Фурье:

$$\Phi = \int f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (2.48)$$

Тогда (2.47) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} f_{\mathbf{k}} &= G_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}; \quad G_{\mathbf{k}} = k_{\xi}^2 / (k^2 + \sigma k_{\xi}^4); \\ N_{\mathbf{k}} &= \int f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Выше упоминалось, что наличие солитонного решения можно определить по простым признакам. Здесь это видно из выражения $G_{\mathbf{k}}$ в (2.49). Чтобы выражение (2.48) было уединенным, требуется уединенность $f_{\mathbf{k}}$. Но (2.49) имеет уединенное гладкое решение только в случае, если

его ядро G_k гладкое и уединенное, а это достигается только при $\sigma = 1$, т.е. в случае положительной дисперсии. На первый взгляд кажется, что (2.49) можно решить методом итераций. Но оператор в правой части (2.49) оказывается несжимающим, т.е. последовательность итераций расходится. Для подавления расходимости в [2.5] был разработан метод стабилизирующего множителя, с помощью которого найдено решение (2.47) в виде двумерного солитона. Он представляет собой модифицированный метод итераций и состоит в следующем. Вместо (2.49) решается уравнение:

$$f_k = s G_k N_k \equiv K[f], \quad (2.50)$$

где $s \equiv [\int f_k^2 dk / \int f_k G_k N_k dk]^n$, K — интегральный оператор в k -пространстве.

Стабилизирующий множитель s эффективно изменяет степень нелинейности уравнения. Опытным путем установлено [2.5], что наилучшая сходимость достигается, когда степень нелинейности равна нулю, т.е. в данном случае, когда $n = 2$. Уравнение (2.50) дает быстро сходящуюся последовательность итераций по формуле

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1} &= K[f_i], \quad i = 0, 1, 2 \dots; \\ \|f_{i+1} - f_i\| &\rightarrow 0, \quad \|f\|^2 \equiv \int f_k^2 dk. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

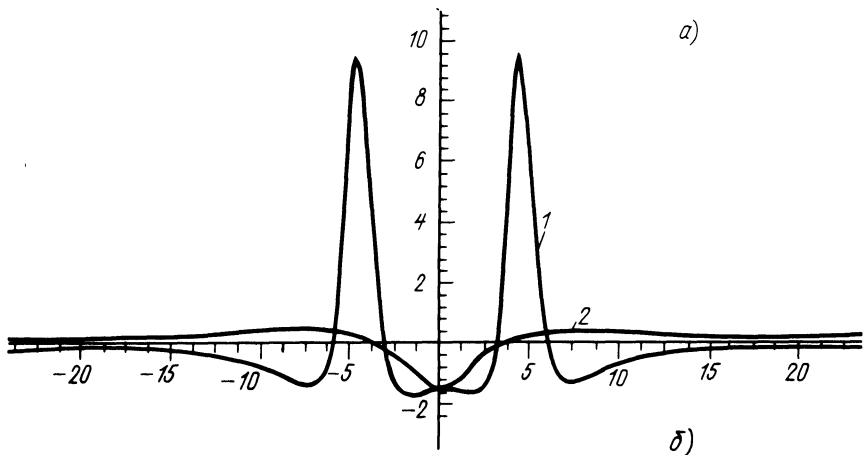
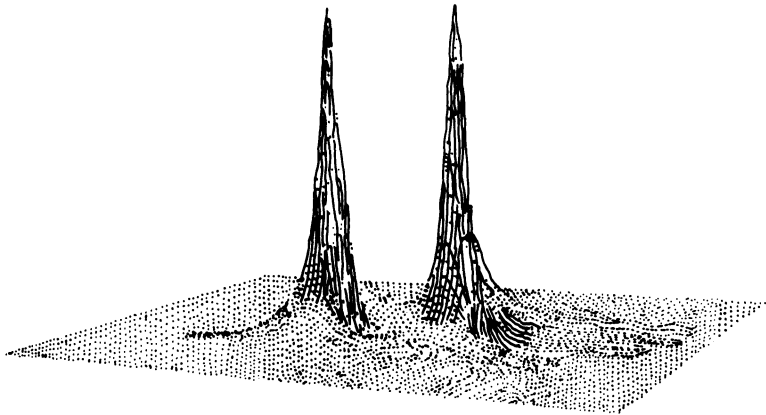
При этом одновременно стабилизирующий множитель s с ростом числа итераций стремится к 1.

Если уравнение солитона сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, то этот метод по точности уступает другим. Если же нелинейное уравнение содержит производные высокого порядка или оно дано в частных производных, его лучше решать этим методом. В [2.6] найдено аналитическое решение (2.47), приведенное в § 2.2. Сравнение результатов счета по методу стабилизирующегося множителя с этим решением показывает их хорошее согласие, что дает основание для использования этого метода для исследования и других, более сложных случаев. Эти случаи рассмотрены в следующем параграфе.

2.5. СВЯЗАННЫЕ СОЛИТОННЫЕ СОСТОЯНИЯ (МУЛЬТИСОЛИТОНЫ)

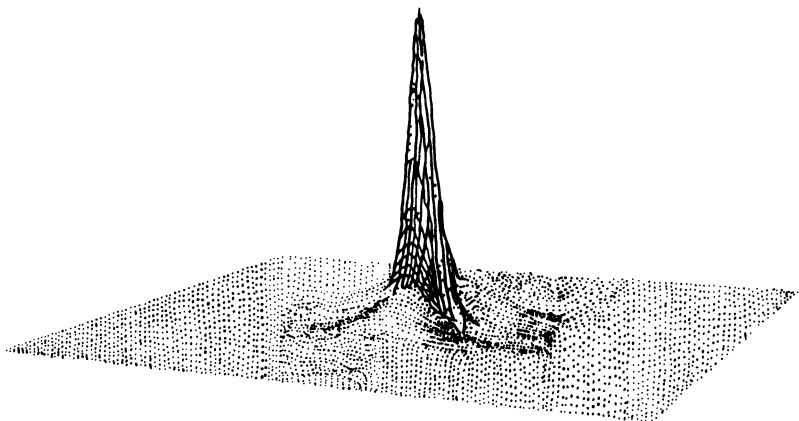
В § 2.2 были приведены N -солитонные решения УКП. Подобные же решения существуют и для ряда других модельных уравнений. Они описывают газ солитонов, сближающихся и расходящихся без изменения формы. В [2.7] были найдены решения двумерного УКП, в которых солитоны образуют связанные состояния в виде бесконечной цепочки или периодической двумерной решетки.

Представляет большой интерес выяснить, существуют ли связанные состояния конечного числа солитонов, движущиеся как целое.

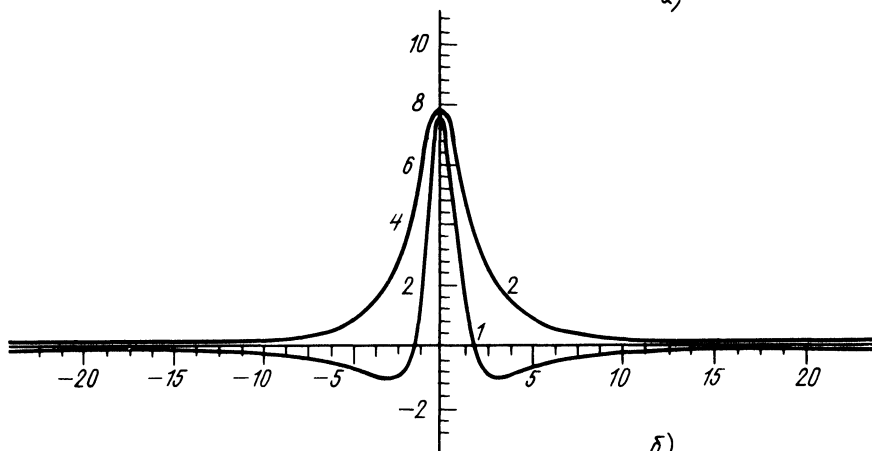


Р и с. 2.3. Рельеф двумерного бисолитонного решения уравнения (2.26) (а) и сечение бисолитона вдоль (1) и поперек (2) направления движения (б)

В таких состояниях солитоны удерживались бы полем соседей подобно атомам в молекуле. Для УКП таких решений в аналитическом виде пока не найдено. В [2.21] методом стабилизирующего множителя было найдено связанное состояние двух солитонов (бисолитон). На рис. 2.3 приводится рельеф этого решения. Для сравнения на рис. 2.4 приведено решение в виде одного солитона, бегущего с той же скоростью, что и бисолитон, аналитическое выражение для которого дается формулой (2.27). Из сравнения этих рисунков видно, что бисолитон образуется захватом одного солитона потенциальной ямой, образуемой другим солитоном с такими же параметрами.



a)

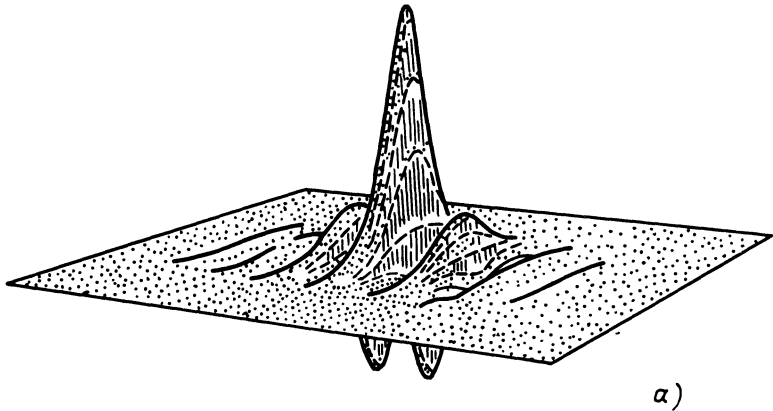


б)

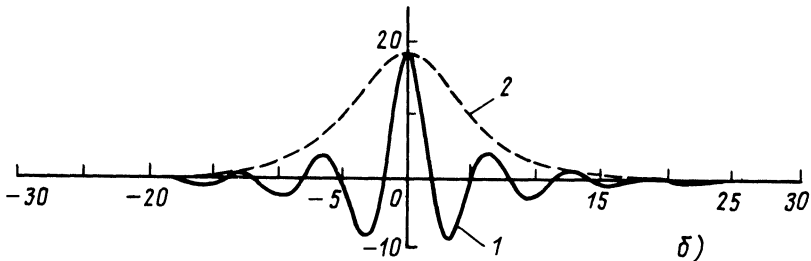
Р и с. 2.4. Рельеф двумерного солитонного решения уравнения (2.26) (а) и сечение солитона вдоль (1) и поперек (2) направления движения (б)

Поправки к интегрируемым уравнениям могут дать качественно новые эффекты, так что их иногда следует учитывать, даже если они малы. К таким поправкам относят поправки к дисперсии. Если поправочный член ослабляет дисперсию, солитон может стать неустойчивым или излучающим. Последнее означает, что уравнение с поправкой может не иметь строго стационарных уединенных решений. Если поправка усиливает дисперсию, могут появиться мультисолитонные решения.

Своеобразная ситуация возникает при рассмотрении поверхностных волн на мелкой воде. В [2.22] показано, что такие волны в системе



а)



б)

Р и с. 2.5. Двумерное солитонное решение уравнения (2.53) при $\epsilon = 1,9$ (а) и главные сечения вдоль движения (1) и поперек движения (2) (б)

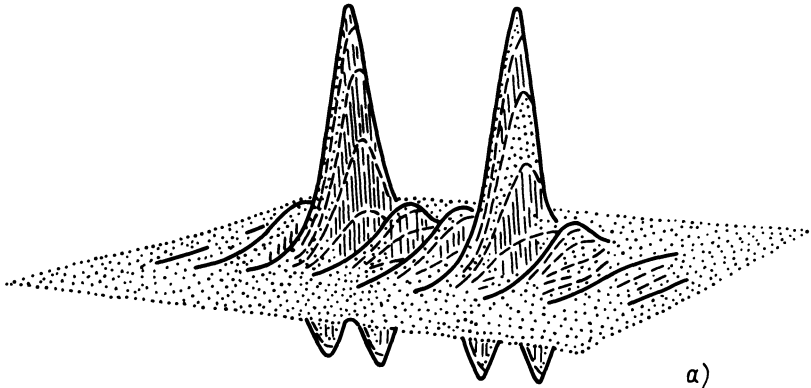
отсчета, бегущей со скоростью $c_g = (gH_0)^{1/2}$ (g — ускорение свободного падения, H_0 — невозмущенная глубина жидкости), описываются уравнением

$$\partial_z (\partial_t h + ah \partial_z h + \beta \partial_z^3 h + \gamma \partial_z^5 h) = - (c_g/2) \partial_z^2 h, \quad (2.52)$$

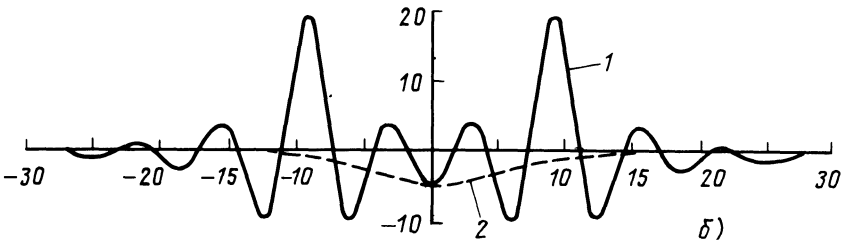
где h — возмущение глубины жидкости; $a = 1,5 c_g/H_0$; $\beta = (c_g/6) \times [H_0^2 - 3\sigma/(\rho g)]$ — параметр дисперсии; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; $\gamma = (c_g/6) \{ H_0^2 [2H_0^2/5 - \sigma/(\rho g)] - (1/12) [3\sigma/(\rho g) - H_0^2]^2 \}$.

Из выражения для β видно, что при $H_0 = [3\sigma/(\rho g)]^{1/2}$ (для чистой воды $H_0 \approx 0,5$ см) дисперсия меняет знак. Подобное изменение дисперсий имеет место и для магнитозвуковых волн (см. § 1.2). Там, однако, этот эффект был связан с изменением угла распространения. С уменьшением глубины воды β становится настолько малым, что существенным оказывается учет высших производных. После обезразмеривания (2.52) приводится к виду:

$$\partial_\zeta (\partial_\tau \psi + \psi \partial_\zeta \psi + \epsilon \partial_\zeta^3 \psi + \partial_\zeta^5 \psi) = -\partial_\eta^2 \psi, \quad (2.53)$$



а)



б)

Р и с. 2.6. Двумерное бисолитонное решение уравнения (2.53) при $\epsilon = 1,9$ (а) и главные сечения вдоль движения (1) и поперек движения (2) (б)

где ϵ — безразмерный параметр дисперсии, пропорциональный β .

Ищем стационарное решение (2.53), бегущее со скоростью $-u$. Для этого представим ψ в виде интеграла Фурье:

$$\psi = \int \psi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}\zeta u t) d\mathbf{k}. \quad (2.54)$$

Тогда, преобразуя (2.53) по Фурье, получаем интегральное уравнение относительно $\psi_{\mathbf{k}}$:

$$\psi_{\mathbf{k}} = G_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}, \quad N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \int \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}', \quad (2.55)$$

где $G_{\mathbf{k}} = \frac{k_{\zeta}^2}{(k_{\zeta}^2 u + k_{\eta}^2 - \epsilon k_{\zeta}^4 + k_{\zeta}^6)}$ [ср. с (2.50)]. Из (2.55) видно, что

при $u > (1/4)\epsilon$ $G_{\mathbf{k}}$ всюду конечно. Поэтому уравнение (2.53) при таких u имеет уединенные двумерные решения.

Солитонные решения (2.52) можно найти только численно, что было сделано [2.22] методом стабилизирующего множителя. Было получено односолитонное и бисолитонное решение, рельефы которых приводятся на рис. 2.5, 2.6. Рисунок 2.5 является аналогом односолитонного решения ВКП (см. рис. 2.4), а рис. 2.6 — бисолитонного решения.

2.6. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. ТРЕХМЕРНЫЙ ИОННО-ЗВУКОВОЙ СОЛИТОН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В анизотропных средах кроме направления распространения волнового пакета имеется и другое выделенное направление. В случае плазмы это направление внешнего магнитного поля. В таких средах дисперсионные и дифракционные эффекты становятся неразличимыми. Появляются два механизма дисперсии: один связан с эффектом дебаевской экранировки и действует только вдоль магнитного поля, другой обусловлен эффектами конечности ларморовского радиуса частиц. Это хорошо видно на простом примере низкочастотных ионно-звуковых волн (частоты которых много меньше ω_{Bi}). В линейном приближении они описываются уравнением (1.14). Нелинейность, как и в предыдущем случае, можно найти в пренебрежении дисперсией. Считая, что пакет имеет блинообразную форму вдоль внешнего магнитного поля ($k_z \gg k_\perp$), получаем, что $v_z \gg v_\perp$. Действуя аналогично случаю без магнитного поля, находим, что в случае малой амплитуды вид нелинейного члена можно найти в пренебрежении производными высокого порядка, что опять приводит к уравнению (2.11). Объединяя уравнения (1.14) и (2.11) и учитывая, что ϕ зависит от аргументов в виде (2.8), получаем нелинейное уравнение, описывающее низкочастотные ионно-звуковые колебания, бегущие вдоль магнитного поля:

$$\partial_t \Phi + c_s \Phi \partial_z \Phi + (c_s r_D^2 / 2) \partial_z^3 \Phi = -(c_s r_s^2 / 2) \nabla_\perp^2 \partial_z \Phi. \quad (2.56)$$

Это уравнение было получено и исследовано В.Е. Захаровым и Е.А. Кузнецовым в [2.23]. В безразмерном виде оно приведено в приложении П.1. Уравнение (2.56) имеет решения в виде одномерного солитона (2.14). Устойчивость этого решения можно исследовать методом, изложенным в § 2.2. Как можно заключить из знака правой части уравнения (2.56), одномерный солитон неустойчив. Ищем трехмерное стационарное решение уравнения (2.56):

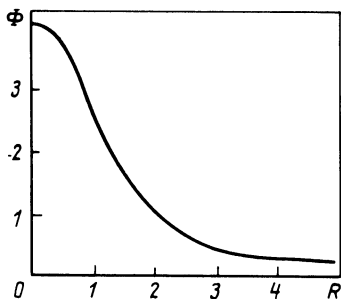
$$\Phi = \Phi_0(\zeta, x, y), \quad \zeta \equiv z - ut. \quad (2.57)$$

После подстановки (2.57) в исходное уравнение (2.56) и однократного интегрирования получим уравнение солитона с квадратичной нелинейностью. В безразмерном виде оно принимает форму

$$\nabla^2 \Phi = u \Phi - \Phi^2. \quad (2.58)$$

Это уравнение имеет сферически симметричное решение, зависящее только от радиуса R . Его график приведен на рис. 2.7. Это решение представляет интерес как редкий случай трехмерного солитона.

Здесь проведем доказательство устойчивости методом Ляпунова. Для этого укажем, что безразмерный аналог уравнения (2.58) сохраняет следующие интегралы:



Р и с. 2.7. Сферически-симметричное решение уравнения (2.58) при $u = 1$

$$P = \int \Phi^2 d^3x; \quad (2.59)$$

$$H = \int [(\nabla\Phi)^2/2 - (2/3)\Phi^3] d^3x. \quad (2.60)$$

Из них составляем функционал Ляпунова в виде

$$L = H + \lambda P. \quad (2.61)$$

Теория устойчивости по Ляпунову более подробно излагается в приложении П.2. Здесь лишь укажем, что для устойчивости достаточно, чтобы решение осуществляло минимум H при фиксированном значении P . Это сводится к условиям равенства нулю первой вариации функционала $\delta L = 0$. Первое условие сводится к уравнению (2.58) и $\lambda = u$. Для проверки второго условия докажем, что L ограничен снизу [2.23]. Для этого воспользуемся неравенством Гельдера

$$(\int \Phi^3 d^3x)^2 \leq (\int \Phi^2 d^3x) (\int \Phi^4 d^3x) \quad (2.62)$$

и неравенством Ладыженской

$$(\int \Phi^4 d^3x)^2 \leq (4/3) (\int \Phi^2 d^3x) (\int |\nabla\Phi|^2 d^3x). \quad (2.63)$$

С помощью этих неравенств получаем, что

$$L \geq -P^3/12 + uP. \quad (2.64)$$

Поскольку уравнение Эйлера (2.58) имеет единственное решение, то отсюда можно заключить, что L достигает своего минимального значения именно на солитонном решении, где $\delta^2 L > 0$. Поэтому солитон устойчив.

2.7. НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКИХ И МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При распространении вдоль магнитного поля плоскость поляризации магнитогидродинамических волн вращается: альфвеновские волны — в сторону циклотронного вращения ионов, а магнитозвуковые — в сторону вращения электронов. Рассмотрим эти волны при $\omega < \omega_{Bi}$, когда частота вращения много меньше ω . Тогда их можно описать простым модельным уравнением, выводу которого посвящен данный параграф. В линейном приближении пакет таких волн в координатном пространстве описывается дисперсионным уравнением (1.31). Компоненты магнитного поля в фурье-пространстве связаны соотношениями

$$(\omega^2 - k_z^2 c_A^2) B_x = (ik_z^2 c_A^2 / \omega_{Bi}) B_y; \quad (2.65)$$

$$(\omega^2 - k_z^2 c_A^2) B_y = -(i\omega k_z^2 c_A^2 / \omega_{Bi}) B_x. \quad (2.66)$$

В альфвеновской волне $B_x = -i \operatorname{sign}(\omega / \omega_{Bi}) B_y$, а в магнитозвуковой $B_x = i \operatorname{sign}(\omega / \omega_{Bi}) B_y$. Отделим только волны, бегущие в сторону положительных z . Тогда приближенно из (2.65) и (2.66) получим:

$$(\omega - k_z c_A) B_x = (i/2) k_z^2 r_A^2 \omega_{Bi} B_y; \quad (2.67)$$

$$(\omega - k_z c_A) B_y = -(i/2) k_z^2 r_A^2 \omega_{Bi} B_x. \quad (2.68)$$

В координатном пространстве в системе отсчета, бегущей со скоростью Альфвена, уравнениям (2.67), (2.68) соответствует

$$(2/\omega_{Bi}) \partial_t B^\delta + i \delta r_A \partial_z^2 B^\delta = 0, \quad (2.69)$$

где $\sqrt{2} B^\sigma \equiv (B_x + i\sigma B_y) / B_0$, $\sigma = \pm 1$.

Отметим, что каждое из уравнений, соответствующих $\sigma = \pm 1$, описывает, согласно (2.67), (2.68), суперпозицию лево- и правовращающихся волн.

Уравнение (2.69) по схеме Кортевега—де Фриза следует дополнить нелинейным членом, при вычислении которого эффектами дисперсии можно пренебречь и воспользоваться уравнениями одножидкостной МГД:

$$(\partial_t + v_z \partial_z) v_\perp = c_A^2 \partial_z (B_\perp / B_0); \quad (2.70)$$

$$(\partial_t + v_z \partial_z) v_z = -(c_A^2 / 2) \partial_z (B_\perp / B_0)^2; \quad (2.71)$$

$$\partial_t B_\perp = \partial_z (v_\perp B_0 - v_z B_\perp); \quad (2.72)$$

$$\partial_t \rho + \partial_z (v_z \rho) = 0. \quad (2.73)$$

Зависимость всех величин от времени и координаты z выбираем в виде $\rho = \rho(z - c_A t, t)$ и т.д. Появление зависимости от второго аргумента вызвано нелинейными эффектами. Поэтому ее можно считать много слабее зависимости от первого аргумента. Возмущения ρ и v_z обусловлены нелинейностью, и поэтому они малы. В них можно пренебречь зависимостью от второго аргумента. Тогда в уравнении (2.73) можно положить $\partial_t \simeq -c_A \partial_z$. После интегрирования по z получаем:

$$\rho = \rho_0 (1 + v_z / c_A), \quad (2.74)$$

где учтено, что на бесконечности $\rho = \rho_0$. В уравнении (2.71) в левой части членом, содержащим v_z^2 , можно пренебречь, что дает

$$v_z = (c_A / 2) (B_\perp / B_0)^2. \quad (2.75)$$

Далее, подставляя (2.74) и (2.75) в уравнения (2.70) и (2.72), получаем:

$$[\partial_t - c_A \partial_z - (c_A/2) \partial_z (B_{\perp}/B_0)^2] \mathbf{B}_{\perp} = B_0 \partial_z \mathbf{v}_{\perp}; \quad (2.76)$$

$$B_0 [\partial_t - c_A \partial_z + (c_A/2) (B_{\perp}/B_0)^2 \partial_z] \mathbf{v}_{\perp} = c_A^2 \partial_z \mathbf{B}_{\perp} - (c_A^2/2) (B_{\perp}/B_0)^2 \partial_z \mathbf{B}_{\perp}. \quad (2.77)$$

Приравнивая в (2.74) и (2.77) члены одного порядка в линейном по \mathbf{B}_{\perp} приближении, имеем

$$\mathbf{v}_{\perp} = -c_A (\mathbf{B}_{\perp}/B_0). \quad (2.78)$$

В следующем порядке по B_{\perp} из (2.76) следует нелинейное уравнение эволюции \mathbf{B}_{\perp} со временем в пренебрежении эффектами дисперсии и дифракции

$$\partial_t \mathbf{B}_{\perp} + (c_A/2) \partial_z |\mathbf{B}_{\perp}|^2 \mathbf{B}_{\perp} = 0. \quad (2.79)$$

Комбинируя параболическое уравнение (1.31) с уравнением (2.79), содержащим нелинейный член, получаем в безразмерной форме следующую систему уравнений, описывающих распространение альфвеновских и магнитозвуковых волн вдоль магнитного поля [2.24]:

$$\partial_t b^{\sigma} + \partial_z |b|^2 b^{\sigma} + i \partial_z^2 b^{\sigma} = 0, \quad (2.80)$$

где $|b|^2 = b^+ b^- = b_x^2 + b_y^2$. Отсюда видно, что из-за нелинейности альфвеновские и магнитозвуковые волны взаимодействуют друг с другом. Физическая причина этого явления заключается в том, что скорость распространения зависит от ВЧ-давления $(B_{\perp})^2$, в которое вносят вклад волны обоих типов.

При определенных условиях они могут зацепиться друг за друга и образовать стационарный солитон, несмотря на то что в линейном приближении их групповые скорости различны. Такой солитон был найден в [2.24]:

$$b^{\sigma} = (A/2)^{1/2} [\exp(-A\xi) + i\sigma \exp(A\xi)] \exp(-i\sigma A^2 \tau) \operatorname{ch}^{-2}(2A\xi), \quad (2.81)$$

где A — амплитуда солитона.

В [2.25] показано, что уравнение (2.81) полностью интегрируемо и решается методом ОЗР. Устойчивость такого одномерного солитона относительно возмущения фронта пока не исследована. Отметим, что если бы он был чисто магнитозвуковым, то он был бы неустойчив, так как его дисперсия положительна.

2.8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН ПОД УГЛОМ К МАГНИТНОМУ ПОЛЮ

При распространении под углом к магнитному полю фазовые скорости альфвеновских и магнитозвуковых волн сильно отличаются друг от друга. В этом случае альфвеновская волна становится анизотропной,

в то время как анизотропные поправки в магнитном звуке при частотах, меньших ω_{Bi} , малы и появляются только в дисперсионном члене. Для поперечного распространения эти поправки малы и при $\omega > \omega_{Bi}$ (см., например, (1.29)). Как следует из предыдущего параграфа, нелинейность в магнитном звуке при распространении строго вдоль магнитного поля кубична по амплитуде. Однако при распространении под конечным углом появляется квадратичная нелинейность адвективного типа (типа КдФ), связанная с членом $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ в уравнении движения и другими подобными членами. Получим упрощенный вид этой нелинейности в пренебрежении дисперсионными и дифракционными поправками. Исходим из уравнений одножидкостной МГД:

$$d_t \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]; \quad (2.82)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]; \quad (2.83)$$

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.84)$$

Здесь считается, что колебаниями давления можно пренебречь по сравнению с колебаниями магнитного поля, что справедливо при малых β . Проводимость плазмы считается бесконечно большой, поэтому напряженность электрического поля в этом приближении $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}]/c$. Пусть волна одномерна и бежит под углом $\theta = \theta_0$ к внешнему магнитному полю \mathbf{B}_0 , направленному вдоль координаты z . Зависимость возмущенных величин от координат и времени ищем в виде

$$\rho = \rho(\xi, \tau); \quad \xi \equiv z \cos \theta_0 + x \sin \theta_0 - c_A t, \quad \tau = t. \quad (2.85)$$

Таким образом, считаем, что зависимость пакета от координаты ξ много сильнее, чем от координат, перпендикулярных ξ . Тогда, действуя аналогично выводу УКП, получим нелинейное упрощенное уравнение

$$\partial_\tau b + (3/2)c_A b \partial_\xi b = 0; \quad b \equiv (B_z - B_0)/B_0. \quad (2.86)$$

Здесь b — безразмерный компонент возмущения магнитного поля вдоль z .

Другими квадратичными нелинейными членами можно пренебречь, так как они содержат малые производные по поперечным координатам. Их будем учитывать только в линейном приближении.

Дополним (2.86) дисперсионными и дифракционными членами. Для этого введем координаты, перпендикулярные ξ : $\xi = z \sin \theta_0 - x \cos \theta_0$; $\eta = y$. Воспользуемся приближением Леонтовича $k \simeq k_\xi + (k_\eta^2 + k_\eta^2)/(2k_\xi)$. Тогда с учетом линейного дисперсионного соотношения

(1.32) уравнение (2.86) приводится к виду:

$$\partial_\xi (c_A^{-1} \partial_\tau b + 1,5 b \partial_\xi b + r_A^2 a_0 \partial_\xi^2 b) = -0,5 \nabla_\perp^2 b;$$

$$\alpha_0 = 0,5 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \gg \beta_i + m_e/m_i. \quad (2.87)$$

Таким образом, при распространении под углами, не близкими к 0 и $\pi/2$, пакет магнитозвуковых волн описывается уравнением УКП с положительной дисперсией. Учитывая результаты предыдущего рассмотрения, можно заключить, что магнитозвуковые волны при косом распространении не образуют устойчивых солитонов. Пакеты таких волн коллапсируют или расплываются. При наличии стационарного источника возможна самофокусировка пучка таких волн. В [2.26] отмечается, что коллапс может служить эффективным механизмом диссипации в косых ударных волнах магнитозвукового типа. Поскольку коллапс происходит только при частотах, меньших ω_{Bi} , а ударная волна бежит со скоростью, близкой к c_A , то отсюда следует, что ширина ее фронта должна быть много больше r_A . При распространении под углами, близкими к $\pi/2$, знак дисперсии изменяется. Дисперсия в этом случае остается слабой и при частотах, близких к ω_{Bi} . При таких частотах существенной становится дополнительная дифракция в направлении постоянного поля. Для учета этого эффекта проведем разложение вблизи $\theta = \theta_0$ в (1.31). Тогда получим

$$\omega = c_A k_{\zeta} [1 + k_{\zeta}^2 r_A^2 (a_* + a_1 \theta_1 + a_2 \theta^2) + c_A k_{\perp}^2 / (2k_{\zeta})], \quad (2.88)$$

где $\theta_1 = \theta - \theta_0 \simeq k_{\zeta} / k_{\zeta}$; $a_1 = \partial_{\theta_0} \alpha_0$, $a_2 = 0,5 \partial_{\theta_0}^2 \alpha_0$; $a_* = \alpha_0 - \beta_i/4 - m_e/(2m_i)$.

Объединяя уравнение (2.88) с (2.86), получаем, что в уравнении (2.88) знак дисперсии может меняться и добавляются два новых члена, содержащих смешанные производные:

$$\begin{aligned} \partial_{\zeta} (\partial_{\tau} b + 1,5b \partial_{\zeta} b + r_A^2 a_* \partial_{\zeta}^2 b) = -0,5 \nabla_{\perp}^2 b + a_1 \partial_{\zeta} \partial_{\zeta}^3 b + \\ + a_2 \partial_{\zeta}^2 \partial_{\zeta}^2 b. \end{aligned} \quad (2.89)$$

В зависимости от знака a_* это уравнение имеет одномерные, двумерные и трехмерные солитонные решения. При $a_* < 0$ имеются только одномерные солитоны. Впервые они были получены Р.З. Сагдеевым [0.1]. Им же было отмечено, что при распространении в конусе углов $\operatorname{ctg}^2 \theta_0 < m_e/m_i + \beta_i/4$, где магнитный звук имеет отрицательную дисперсию, солитон представляет собой волну сгущения плотности и магнитного поля, а вне его — волну разрежения, т.е. внутри солитона магнитное поле и плотность меньше, чем в окружающем фоне. При малых амплитудах решения Сагдеева совпадают с одномерными решениями УКП. Впоследствии стало ясно, что одномерные солитоны разрежения неустойчивы относительно его фронта, как солитоны в средах с положительной дисперсией. Двумерные солитоны возможны при $a_* > 0$. В случае, когда поправки со смешанными производными к УКП несущественны, двумерные солитоны, как было показано выше, неустойчивы. В [2.27]

показано, что они могут стабилизировать двумерные солитоны. Выясним условия, при которых это возможно. Оказывается, что это имеет место при частотах $\omega \gtrsim \omega_{Bi}$, размерах меньше r_A и углах распространения, близких к углу, где дисперсия меняет знак.

Двумерные солитонные решения уравнения (2.89), не зависящие от координаты, имеют тот же вид, что и решения УКП в виде рациональных солитонов. Устойчивость их исследуем аналогично § 2.2. Линеаризуя уравнения (2.89) на фоне солитонного решения (2.27), получаем

$$L\psi = i\partial_{\xi}(\omega\psi - \alpha_1 k \partial_{\xi}^2 \psi) - k^2(\psi - \alpha_2 \partial_{\xi}^2 \psi), \quad (2.90)$$

где оператор L определен соотношением (2.33).

Разлагая ψ в ряд по степеням малого параметра $\omega \sim k$ аналогично (2.16), получим цепочку уравнений вида (2.17)–(2.19) с дополнительными членами:

$$L\psi_0 = 0; \quad (2.91)$$

$$L\psi_1 = i\omega \partial_{\xi} \psi_0 - i\alpha_1 k \partial_{\xi}^3 \psi_0; \quad (2.92)$$

$$L\psi_2 = i\omega \partial_{\xi} \psi_1 - i\alpha_1 k \partial_{\xi}^3 \psi_1 - k^2(\psi_0 - \alpha_2 \partial_{\xi}^2 \psi_0). \quad (2.93)$$

Решение нулевого приближения (2.91) совпадает с (2.20). Подставляя его в (2.92), получаем

$$\psi_1 = i\omega \partial_u \psi_0 + \frac{i k \alpha_1}{2\sigma} \partial_{\alpha_0} \varphi_0. \quad (2.94)$$

С учетом (2.94) получаем уравнение, определяющее ψ_2 . Действуя аналогично § 2.2, получаем условие разрешимости этого уравнения в виде

$$\omega^2 + \alpha_1 \alpha_*^{-1} u \omega (1 - 3I) + 4u + 4u^2 \alpha_*^{-1} I = 0, \quad (2.95)$$

где

$$I = \int (\partial_{\xi} \Phi_0)^2 d\xi dx / \int \Phi_0^2 d\xi dx. \quad (2.96)$$

Пользуясь уравнением солитона (2.27), можно показать, что $I = 2$. Тогда из (2.95) следует условие устойчивости двумерного солитона — условие действительности корней (2.95)

$$(\alpha_1/\alpha_*)^2 u > 16/25 + (32/25)u \alpha_*^{-1}. \quad (2.97)$$

Это определяет интервал углов, при которых двумерный солитон устойчив:

$$\beta_i/4 + m_e/(2m_i) < \cos^2 \theta_0 < 3/10. \quad (2.98)$$

Кроме того, скорость распространения u должна быть достаточно большой, что определяется условием (2.97).

Таким образом, магнитозвуковые волны проявляют разные нелинейные свойства при различных углах распространения. Это связано со знаком дисперсии и видом нелинейности.

Глава 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ТИПА

3.1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), по-видимому, является одним из важнейших уравнений оптического типа по имеющимся приложениям в теории волн в плазме, а также и в других областях физики. Особенно интересно применение уравнений типа НУШ в теории элементарных частиц.

НУШ получается, например, из нелинейного уравнения Клейна–Гордона в предположении малости отношения кинетической энергии к энергии пакета и малости плотности числа частиц. Последнее имеет вид

$$\partial_t^2 \varphi - \nabla^2 \varphi + (1 + M)\varphi = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $M = M(|\varphi|)$ – нелинейная действительная функция, учитывающая поправки к массе покоя (принятой здесь равной 1). Внешние поля для простоты считаем отсутствующими. Основное качественное отличие уравнения (3.1) от уравнений акустического типа заключается в наличии третьего члена, учитывающего влияние массы покоя. Поэтому при больших длинах волн частоты волнового пакета уже не обращаются в нуль, а стремятся к $\pm\sqrt{1-M}$. Несмотря на действительные коэффициенты, решение этого уравнения может быть комплексно. Оно сохраняет два интеграла – энергии H и заряда Q :

$$H = \left(\frac{1}{2}\right) \int \{ |\partial_t \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 \} d^3x + H_M; \quad (3.2)$$

$$Q = i \int (\varphi^* \partial_t \varphi - \varphi \partial_t \varphi^*) d^3x, \quad (3.3)$$

где H_M – часть энергии, связанная с M .

Уравнение (3.1) имеет осциллирующее солитонное решение вида $\varphi = f(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$, где f обращается в нуль на бесконечности и удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 f = (1 - \omega^2)f - Mf. \quad (3.4)$$

Солитонные решения (3.4) имеют сферически симметричный вид и существуют только, если $\omega^2 < 1$ и $M > 0$. Устойчивость таких солитонов исследовалась в [3.1]. Оказалось, что если $M = |\varphi|^{2n}$, то m -мерные солитонные решения в m -мерном пространстве устойчивы при

$$mn/2 < \omega^2 < 1, \quad n > 0. \quad (3.5)$$

Отсюда видно, что при росте амплитуды (что, как легко проверить, соответствует уменьшению ω^2) солитон теряет устойчивость.

В пределе малой амплитуды и малости $|\nabla^2 \varphi|$ (что в релятивистской теории соответствует малости кинетической энергии по сравнению с энергией покоя) из уравнения (3.1) получается НУШ. Для этого решение (3.1) нужно представить в виде осциллирующей функции с единичной частотой, амплитуда которой слабо зависит от времени и координат:

$$\varphi = \frac{1}{2} [\psi(\mathbf{r}, t) \exp(-it) + \text{к.с.}]. \quad (3.6)$$

В параболическом приближении, проводя разложение по степеням ψ и кинетической энергии ($\nabla^2 \psi / \psi \ll 1$), получаем НУШ с точностью до численных коэффициентов:

$$i \partial_t \psi + \nabla^2 \psi - U(p) \psi = 0, \quad p = \psi \psi^*. \quad (3.7)$$

Здесь U — нелинейный потенциал НУШ, соответствующий нелинейной поправке к массе покоя в (3.1).

Это уравнение имеет следующие интегралы: число частиц

$$N = \int |\psi|^2 d^3x \quad (3.8)$$

и энергию

$$H = \int [|\nabla \psi|^2 + \int U dp] d^3x. \quad (3.9)$$

Сохранение энергии следует из гамильтоновой формы записи уравнения (3.7)

$$i \partial_t \psi = \delta H / \delta \psi^*. \quad (3.10)$$

Стационарные решения уравнения (3.7) в общем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0(\mathbf{r} - 2\mathbf{k}t) \sigma; \\ \sigma &= \exp \left[i[-(\omega_0 - k^2)t + \mathbf{k}\mathbf{r}] \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где \mathbf{k} — произвольный постоянный вектор; ω_0 — частота. Подстановкой (3.11) в (3.7) получаем уравнение, которому должно удовлетворять ψ_0 :

$$\nabla^2 \psi_0 = -[\omega_0 - U(p_0)] \psi_0, \quad p_0 = \psi_0^2, \quad (3.12)$$

откуда видно, что ψ_0 — действительная функция. Зависимость ψ_0 от координат называют модуляцией по амплитуде; множитель σ дает модуляцию решения по фазе. Это уравнение может иметь решения в виде трехмерных периодических волн и трехмерных сферически симметричных солитонов. Исследуем солитонные решения (3.12). Для нали-

чия солитонного решения необходимо иметь потенциальную яму в области малых p_0 , что выполняется при условии, что $U' < 0$ в этой окрестности. Штрих означает производную по p_0 . Для удобства положим $U(0) = 0$. В такой яме энергия солитона отрицательна. Введем обозначение $\omega_0 = -A^2$. Солитонное решение устойчиво, если на таком решении гамильтониан H имеет условный минимум с условием постоянства числа частиц N . Тогда малые отклонения от солитонного решения не будут расти неограниченно из-за положительности соответствующего отклонения гамильтониана от минимума как функционала $\delta\psi$. Исследуем, при каком U гамильтониан может иметь относительный минимум на стационарных решениях (3.12). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы вторая вариация H была положительной при всех отклонениях ψ от стационарного решения, сохраняющих N постоянным. Составим функционал Ляпунова

$$L = A^2 N + H. \quad (3.13)$$

Приравнивание первой вариации функционала (3.13) нулю дает уравнение (3.12), где $\omega_0 = -A^2$. Запишем вариацию в виде

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi; \quad \delta\psi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad (3.14)$$

где φ_1, φ_2 , как и ψ_0 , — действительные функции. Фазовый множитель в (3.11) не влияет на результат, и здесь его можно опустить. Подставляя (3.14) в (3.13) с учетом (3.12), получаем:

$$\delta^2 L = \int (\varphi_1 L_1 \varphi_1 + \varphi_2 L_0 \varphi_2) d^3 x, \quad (3.15)$$

где L_0, L_1 — операторы:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= -\nabla^2 + U_0 + A^2, \quad U_0 = U(p_0); \\ L_1 &= L_0 + U'_0 p_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Условие постоянства N при вариации (3.14) в первом приближении дает

$$\int \varphi_1 \psi_0 d^3 x = 0. \quad (3.17)$$

Из сравнения уравнений (3.12) и (3.16) следует:

$$\left. \begin{aligned} L_0 \psi_0 &= 0; \quad L_1 \nabla \psi_0 = 0; \\ L_1 \partial_A \psi_0 &= -2A \psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Видно, что ψ_0 является безузловой собственной функцией оператора L_0 , откуда следует, что она есть функция основного состояния с минимальной энергией — собственным числом оператора. Поэтому для произвольной функции φ_2 имеем

$$\int \varphi_2 L_0 \varphi_2 dx^3 \geq 0. \quad (3.19)$$

Теперь достаточно показать, что интеграл от первого члена в правой

части (3.15) положителен, и тогда можно считать решение устойчивым. Как видно из (3.16), L_1 отличается от L_0 отрицательной добавкой, поэтому, если бы не условие (3.17), выражение (3.15) заведомо было бы отрицательным, а солитон – неустойчивым.

Оператор L_1 – эрмитов, поэтому имеет полную систему собственных функций χ_ω с собственными значениями ω , удовлетворяющими уравнениям

$$L_1 \chi_\omega = \omega \chi_\omega; \int \chi_\omega \chi_{\omega'} d^3x = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.20)$$

Разложим ψ_0 и φ_1 по этой системе ортогональных функций:

$$\psi_0 = \sum_{\omega} \psi_{\omega} \chi_{\omega}; \quad \varphi_1 = \sum_{\omega} \varphi_{\omega} \chi_{\omega}. \quad (3.21)$$

Тогда, подставляя эти разложения в (3.15), с учетом (3.19), (3.20) получаем

$$\delta^2 L \geq \sum_{\omega} \omega |\varphi_{\omega}|^2. \quad (3.22)$$

С учетом (3.20), (3.21) из (3.17) следует, что спектр функции φ не произвольный, а должен удовлетворять условию постоянства N :

$$\sum_{\omega} \varphi_{\omega} \psi_{\omega} = 0. \quad (3.23)$$

Согласно первому уравнению (3.18) оператор L_1 имеет собственную функцию $\nabla \psi_0$ с нулевым собственным значением $\omega = 0$. Поскольку мы рассматриваем безузловое решение ψ_0 уравнения (3.18), то получается, что при $\omega = 0$ оператор L_1 имеет решения с одним узлом. Отсюда следует, что L_1 имеет одно безусловное решение χ_g с собственным числом $\omega = \omega_g < 0$, а все остальные собственные значения положительны. Подставляя φ_g из (3.23) в (3.22), получаем:

$$\delta^2 W \geq \sum_{\omega > 0} \omega |\varphi_{\omega}|^2 + (\omega_g / |\psi_g|^2) \left(\sum_{\omega > 0} \varphi_{\omega} \psi_{\omega} \right)^2. \quad (3.24)$$

Здесь ψ_g – коэффициент разложения ψ_0 при функции основного состояния χ_g . Заметим, что ввиду ортогональности ψ_0 к собственной функции состояния с $\omega = 0$, которая согласно (3.18) есть $\nabla \psi_0$, имеем $\psi_{\omega}|_{\omega=0} = 0$.

Неравенство Гельдера дает оценку

$$\left(\sum_{\omega > 0} \varphi_{\omega} \psi_{\omega} \right)^2 \leq \left(\sum_{\omega > 0} \omega |\varphi_{\omega}|^2 \right) \left(\sum_{\omega > 0} |\psi_{\omega}|^2 / \omega \right). \quad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в (3.24), получаем более простое неравенство:

$$\delta^2 W \geq -a^2 [|\psi_g|^2 / \omega_g + \sum_{\omega > 0} |\psi_{\omega}|^2 / \omega]. \quad (3.26)$$

Здесь с учетом того, что $\omega_g < 0$, константа $a^2 > 0$. В последнем уравнении в (3.18) переходим к разложению по собственным функциям (3.20):

$$\omega \partial_A \psi_\omega = -2A \psi_\omega \quad (3.27)$$

С учетом этого равенства (3.26) принимает вид

$$\delta^2 L \geq \frac{a^2}{2A} \sum_\omega \psi_\omega^* \partial_A \psi_\omega = \frac{c^2}{4A} \partial_A \sum_\omega |\psi_\omega|^2. \quad (3.28)$$

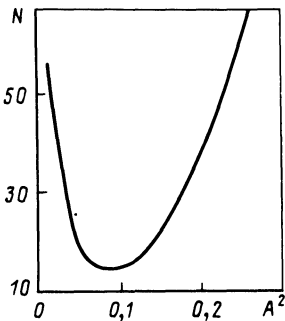
Здесь суммирование проводится по всем собственным состояниям. С помощью первого разложения (3.21) и выражения для числа частиц (3.8) из (3.28) получаем условие устойчивости солитонного решения (условие положительности второй вариации от L):

$$\partial_A N > 0. \quad (3.29)$$

Этот критерий был получен Н.Г. Вахитовым и А.А. Колоколовым [3.2]. Его наглядный смысл состоит в следующем: для устойчивости достаточно, чтобы число частиц в солитоне N росло с ростом его амплитуды A .

Рассмотрим частный случай $U = -p_0^n$. Тогда, учитывая, что $\omega_0 = -A^2$, получаем $N \sim A^{(2/n-m)}$, где m – размерность пространства. Из (3.29) следует, что при степенном потенциале в m -размерном пространстве солитон устойчив, если $mn < 2$ [ср. с (3.5)]. В противном случае солитонное решение в зависимости от вида начального возмущения или коллапсирует, или расплывается. В [3.2] рассмотрены солитонные решения (3.12) при $U = -p_0/(1+p_0)$. Это нелинейный потенциал, в котором с ростом амплитуды нелинейность насыщается. При малых амплитудах A решение неустойчиво, так как насыщение не достигается и эффективно $n = 1$. С ростом A степень нелинейности n эффективно уменьшается и солитон должен стать устойчивым. На рис. 3.1 дается зависимость N от A^2 . Видно, что при таком потенциале трехмерный солитон становится устойчивым при $A^2 > 0,08$. Критерий (3.29) имеет, по-видимому,

большую общность, чем в доказанном случае. Например, это имеет место при сложных операторах и отклонении от сферической симметрии. В этом случае бывает, что интегралы движения имеются, но строгого доказательства устойчивых стационарных решений нет.



Р и с. 3.1. Зависимость числа частиц N от амплитуды A^2 в случае безусловного солитонного решения уравнения (3.18) с насыщающей нелинейностью

3.2. ЛЕНГМЮРОВСКИЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ, УРАВНЕНИЕ ЗАХАРОВА

Заряд в плазме в стационарном случае экранируется на расстояниях порядка дебаевской длины $r_D = v_{Te}/\omega_{pe}$. Однако высокочастотные колебания заряда (с частотой $> \omega_{pe}$) уже не экранируются и распространяются в виде волн, открытых Ленгмюром в 1930 г. Закон дисперсии ленгмюровских волн имеет вид

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 1,5 k^2 r_D^2), \quad kr_D \ll 1. \quad (3.30)$$

Эти волны из-за малой фазовой скорости легко возбуждаются пучками электронов или электромагнитных волн. В связи с этим они играют большую роль при пучковом и ВЧ-нагреве плазмы. Плотность энергии ленгмюровских волн W в ряде экспериментов превышает плотность энергии плазмы nT , что очень существенно учесть, например, при оценке температуры по уширению спектральных линий в лазерной плазме и z-пинчах. Однако сильно нелинейные эффекты в ленгмюровских волнах появляются гораздо раньше: при $W/(nT) \gtrsim k^2 r_D^2$ [3.3]. При таком уровне турбулентности становится неприменимым приближение хаотических фаз фурье-гармоник электрического поля. В 1972 г. В.Е. Захаровым [3.4] было предложено упрощенное уравнение для описания нелинейных ленгмюровских волн. Основная нелинейность в нем вызвана ВЧ-давлением, влияющим на плотность ионов. Это приводит к образованию ям плотности (каверн), в которых запирается ВЧ-поле. В [3.4] показано, что такие каверны неустойчивы и схлопываются, сгребая ВЧ-поле до размеров радиуса Дебая, где становится существенным затухание Ландау на электронах. Это явление получило название ленгмюровского коллапса.

При наличии источника энергии возможна компенсация затухания Ландау в кавернах и тогда происходит образование стационарных каверн — ленгмюровских солитонов [3.5]. Таким образом, сильная ленгмюровская турбулентность в зависимости от вида источника может состоять из спонтанно возникающих и коллапсирующих каверн или из квазистационарных диссипативных солитонов.

Приступим к выводу уравнения Захарова [3.4]. Для простоты считаем $T_i \simeq T_e$, так что ионный звук является сильно затухающим. Проведем разделение поля колебаний на высокочастотную и низкочастотные части:

$$\varphi = \frac{1}{2} \{ \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_p t) + \text{к.с.} \} + \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (3.31)$$

Здесь ψ — амплитуда высокочастотных осцилляций, являющаяся медленной функцией времени ($\partial_t \psi \ll \omega_{pe} \psi$); Φ — низкочастотная часть потенциала. Уравнения движения для электронов разделим на медленно меняющуюся и быстро осциллирующую части. Тогда, усредняя его

по быстрым осцилляциям, получаем:

$$\langle \mathbf{v}_e \nabla \mathbf{v}_e \rangle = (e/m_e) \nabla \Phi - (T_e/m) \nabla (\delta n/n_0), \quad (3.32)$$

где δn — низкочастотное возмущение плотности плазмы; угловые скобки означают усреднение по быстрым осцилляциям. Считаем зависимость ψ от времени достаточно слабой. Из-за сильного затухания ионного звука ионы распределены по Больцману в низкочастотном потенциале Φ :

$$\delta n \simeq -(e\Phi/T_i)n_0. \quad (3.33)$$

Отклонением от квазинейтральности в низкочастотных колебаниях можно пренебречь, так что низкочастотная часть плотности электронов также выражается через (3.33).

Учитывая (3.31), из уравнения движения электронов получаем:

$$\mathbf{v}_e = \frac{i e}{2 m_e \omega_{pe}} (1 + 1,5 r_D^2 \nabla^2) \nabla \psi \exp(-i \omega_{pe} t) + \text{к.с.} \quad (3.34)$$

Для замыкания системы уравнений воспользуемся уравнением Максвелла:

$$\partial_t \nabla^2 \varphi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = -e(n_0 + \delta n) \mathbf{v}_e. \quad (3.35)$$

Выделяя высокочастотную часть и подставляя (3.31), (3.33) и (3.34) в (3.35), получаем:

$$\nabla^2 \left(\frac{2i}{\omega_{pe}} \partial_t \psi + 1,5 r_D^2 \nabla^2 \psi \right) + \frac{\operatorname{div} (|\nabla \psi|^2 \nabla \psi)}{16 \pi n_0 (T_i + T_e)} = 0. \quad (3.36)$$

После обезразмеривания это уравнение приводится к виду:

$$\nabla^2 (i \partial_t \psi + \nabla^2 \psi) + \operatorname{div} (|\nabla \psi|^2 \nabla \psi) = 0. \quad (3.37)$$

Аналогично НУШ это уравнение сохраняет энергию и число частиц

$$H = \int (|\nabla^2 \psi|^2 - 0,5 |\nabla \psi|^4) d^3x; \quad (3.38)$$

$$N = \int (|\nabla \psi|^2) d^3x. \quad (3.39)$$

Эти интегралы можно использовать для исследования устойчивости солитонных решений аналогично случаю НУШ. Уравнение (3.37) имеет стационарные решения, осциллирующие с малой частотой $\omega = -A^2$:

$$\psi = \frac{1}{2} \{ \psi_0(\mathbf{r}) \exp(i A^2 t) + \text{к.с.} \}. \quad (3.40)$$

Подставляя (3.40) в (3.37), получаем уравнение для действительной функции $\psi_0(\mathbf{r})$:

$$\nabla^2(\nabla^2\psi_0 - A^2\psi_0) + \operatorname{div}(|\nabla\psi_0|^2 \nabla\psi_0) = 0. \quad (3.41)$$

Это уравнение имеет решения в виде одномерных, цилиндрических и сферически симметричных солитонов. Действуя аналогично предыдущему рассмотрению, можно показать, что все эти решения неустойчивы. Действительно, подставляя (3.40) в (3.39), получаем:

$$N = \operatorname{const} \cdot A^{2-m}. \quad (3.42)$$

Здесь m — размерность пространства.

Согласно критерию Вахитова—Колоколова (3.29), m -мерные солитонные решения (3.41) в m -мерном же пространстве устойчивы только в одномерном случае, когда $m = 1$. Однако и это решение неустойчиво относительно двумерных и трехмерных возмущений. Это можно показать, действуя аналогично исследованию устойчивости одномерного солитона в уравнении КП (см. также § 3.3).

Умножая (3.40) на $r \nabla\psi_0$, интегрируя по объему и пользуясь локальностью ψ_0 , получаем

$$H = [(m-2)/(4-m)] A^2 N. \quad (3.43)$$

Отсюда видно, что энергия солитона в одномерном пространстве отрицательна, в двумерном равна нулю, а в трехмерном положительна.

3.3. УРАВНЕНИЯ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Выше было получено уравнение ленгмюровских волн без магнитного поля с учетом важнейшего нелинейного эффекта — пондеромоторной силы. При этом характерная длина дисперсии равна дебаевскому радиусу. Наличие слабого магнитного поля намного увеличивает эту длину в направлении поперек магнитного поля. Рассмотрим, как это сказывается на уравнении ленгмюровских волн.

Дисперсионное уравнение потенциальных волн с частотой, близкой к ω_{pe} , и с направлением волнового вектора, близким к направлению магнитного поля, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{pe}^2 (1 + 1,5 k_z^2 r_D^2 + \alpha k_{\perp}^2 / k_z^2); \\ \alpha k_{\perp}^2 &\ll k_z^2; \quad k^2 r_D^2 \ll 1; \\ \alpha &\equiv \omega_{Be}^2 / (\omega_{pe}^2 - \omega_{Be}^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Здесь ω_{pe} , ω_{Be} — ленгмюровская и циклотронная частоты электронов. Если частота пакета близка к ω_{pe} , то потенциал в нем можно представить в виде (3.6).

Считаем для простоты скорость пакета много меньшей скорости ионного звука. Тогда изменение плотности плазмы под действием ВЧ-дав-

ление выразится формулой

$$\delta n = - \frac{1}{16\pi(T_i + T_e)} |\partial_z \psi|^2. \quad (3.45)$$

Электрическим полем поперек магнитного поля можно пренебречь в (3.45) из-за предполагаемой слабой зависимости ψ от r_\perp . Отсюда находим локальное изменение ленгмюровской частоты и тогда уравнения (3.44), (3.45) дают [3.6]

$$\partial_z^2 \left(\frac{2i}{\omega_{pe}} \partial_t \psi + 1,5 r_D^2 \partial_z^2 \psi \right) - \partial_z \left(\frac{\delta n}{n_0} \partial_z \psi \right) = \alpha \nabla_\perp^2 \psi, \quad (3.46)$$

где $\nabla_\perp^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$; $\alpha \nabla_\perp^2 \psi \ll \partial_z^2 \psi$; n_0 – средняя плотность плазмы. Уравнение (3.46) в зависимости от знака α имеет разные знаки дисперсии поперек магнитного поля. В случае пакета конечных размеров (3.46) сохраняет число частиц N и энергию H в виде

$$N = \int |\partial_z \psi|^2 d^3x; \quad (3.47)$$

$$H = \int \left[1,5 r_D^2 |\partial_z^2 \psi|^2 + \alpha |\nabla_\perp \psi|^2 - \frac{|\partial_z \psi|^4}{32\pi n_0 (T_i + T_e)} \right] d^3x. \quad (3.48)$$

Согласно знаку α в (3.44) уравнение (3.46) может иметь стационарное трехмерное решение, если плазменная частота больше циклотронной, когда вклад в энергию (3.48) от поперечного электрического поля положителен. Ищем стационарное решение (3.46) в виде

$$\partial_z \psi = \sqrt{32\pi n_0 (T_i + T_e)} A f(\rho, \zeta) \exp(i\omega_{pe} A^2 t/2). \quad (3.49)$$

Здесь введены безразмерные координаты:

$$\zeta = \frac{A}{\sqrt{3} r_D} z; \quad \rho = \frac{A^2}{\sqrt{3\alpha}} \frac{r_\perp}{r_D}; \quad (3.50)$$

Тогда для безразмерной действительной функции f получаем уравнение

$$\partial_\zeta^2 (\partial_\zeta^2 f - f + f^3) = \nabla_\rho^2 f, \quad (3.51)$$

которое имеет солитонное, т.е. гладкое, решение, стремящееся к нулю на бесконечности. Это решение было найдено численно в [3.6] с помощью метода стабилизирующего множителя (см. гл. 2). Нетрудно показать, что энергия солитонов (3.48) положительна, а число частиц пропорционально A^{-3} , поэтому $\partial_A N < 0$, и согласно условию устойчивости (3.29) такой солитон неустойчив относительно расплывания.

Исследуем теперь одномерные стационарные решения (3.46). Для этого переписываем

$$i \partial_t E + \partial_z^2 E + |E|^2 E = \alpha \nabla_{\perp}^2 \iint E dz' dz'', \quad (3.52)$$

где $\vec{E} = -\partial_z \psi$ – компонент электрического поля вдоль z .

Одномерное периодическое решение (3.52) имеет вид

$$E(z, t) = A f(\xi) \sigma, \quad (3.53)$$

где $\xi = A(z - 2pt)$; $\sigma = \exp[i(\pm A^2 - p^2)t + ipz]$; A и p – постоянные; σ описывает модуляцию фазы волны.

Условия применимости уравнения (3.52) накладывают ограничения на величины A и p , а именно: $0 < A \ll 1$, $|p| \ll 1$ (малость амплитуды и групповой скорости волны). Действительная функция $f(\xi)$ согласно (3.52) удовлетворяет уравнению

$$d_{\xi}^2 f = \pm f - f^3; \quad d_{\xi}^2 \equiv d^2/d\xi^2, \quad (3.54)$$

которое имеет периодические решения следующих двух типов:

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{2\kappa^2}{|2\kappa^2 - 1|}} \operatorname{cn} \left(\frac{\xi}{\sqrt{|2\kappa^2 - 1|}}, \kappa \right); \quad (3.55)$$

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{2 - \kappa^2}} \operatorname{dn} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2 - \kappa^2}}, \kappa \right). \quad (3.56)$$

Здесь cn , dn – эллиптические функции Якоби; κ – их модуль.

При верхнем знаке (3.54) имеем решение (3.55), а также (3.56), если $\kappa^2 > 0,5$, при нижнем знаке – только (3.56) при $\kappa^2 < 0,5$. Период решения (3.55) равен $\lambda = 4K(\kappa) \sqrt{2\kappa^2 - 1}$, а решения (3.56) $\lambda = 2K(\kappa) \times \sqrt{2 - \kappa^2}$, где $K(\kappa)$ – полный эллиптический интеграл.

Устойчивость периодических волн с постоянной амплитудой $f = 1$ изучалась в [3.3]. Показано, что такое решение неустойчиво относительно модуляций вдоль направления распространения с инкрементом

$$\gamma = k\sqrt{2A^2 - k^2} \leq A^2, \quad (3.57)$$

где k – волновое число возмущения.

Исследуем устойчивость стационарных решений (3.55), (3.56) по отношению к бесконечно малым возмущениям. Для этого представим E в виде

$$E(z, x, t) = A [f(\xi) + \varphi_1(\xi, t) + i\varphi_2(\xi, t)] \exp(iAkx), \quad (3.58)$$

где действительные функции φ_1 , φ_2 являются возмущениями основного решения $f(\xi)$. Подставляя (3.58) в (3.52) и линеаризуя относительно φ_1 и φ_2 , приходим к системе двух уравнений с действительными коэффициентами:

$$\partial_t \varphi_1 = A^2 L_2 \varphi_2 + \alpha k^2 \iint \varphi_2 d\xi' d\xi'', \quad (3.59)$$

где оператор L_2 определен соотношением

$$L_2 = [1 - \partial_\xi^2 - f^2], \quad L_2 f = 0, \quad (3.60)$$

$$\partial_t \varphi_2 = -L_1 \varphi_1 - \alpha k^2 \iint \varphi_1 d\xi' d\xi'', \quad (3.61)$$

где

$$L_1 = 1 - \partial_\xi^2 - 3f^2, \quad L_1 \partial_\xi f = 0. \quad (3.62)$$

Исследуем сначала устойчивость относительно одномерных возмущений (относительно самомодуляции). Для этого положим $k = 0$.

Выбирая зависимость от времени в виде

$$\varphi_2(\xi, t) = \psi(\xi) \exp(A^2 \gamma t), \quad (3.63)$$

находим

$$L_1 L_2 \psi(\xi) = \gamma^2 \psi(\xi). \quad (3.64)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению собственных значений γ^2 обыкновенного дифференциального уравнения (3.64) с периодическими коэффициентами при условии, что решение всюду конечно [3.8]. Если получим, что все γ^2 при данном k действительны и отрицательны, то решение устойчиво. В противном случае оно неустойчиво с инкрементом $\approx A^2 \text{Re} \gamma$. Ищем решение уравнения (3.64) в виде решения Флоке:

$$\psi(\xi) = u(\xi) \exp(i k_0 q \xi), \quad -1/2 \leq q \leq 1/2. \quad (3.65)$$

Здесь $u(\xi)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/k_0$; k_0 — основное волновое число периодической функции $f^2(\xi)$; $k_0 q$ — характеристический показатель (квазиимпульс). При этом задача устойчивости периодической волны сводится к задаче нахождения энергии квазичастиц γ^2 от квазиимпульса $k_0 q$ в одномерной кристаллической решетке. Эту задачу можно свести к алгебраической, разлагая $u(\xi)$ в ряд Фурье:

$$u(\xi) = \sum_n c_n \exp(in k_0 \xi). \quad (3.66)$$

Тогда, проведя фурье-преобразование (3.64), получим

$$\sum_n L_{mn} c_n = -\gamma^2 c_m, \quad (3.67)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_{mn} &= [1 + k_0^2 (n+q)^2]^2 \delta_{mn} + 3D_2 (m-n) - \\ &- \{4 + [3k_0^2 (n+q)^2 + k_0^2 (m+q)^2]\} D_1 (m-n); \\ D_1(n) &= \frac{k_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_0} f^2 \exp(in k_0 \xi) d\xi; \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

$$D_2(n) = \frac{k_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_0} f^4(\xi) \exp(ink_0\xi) d\xi.$$

Решение уравнений (3.67) сводится к нахождению собственных значений бесконечной матрицы (3.68). Можно показать, что значения интегралов D_1 и D_2 быстро спадают с ростом $|m-n|$ при $\kappa^2 < 0,999$. С другой стороны, численное исследование поведения собственных значений матрицы с ростом числа учитываемых гармоник показывает, что, начиная с матрицы размером 20×20 , значения неустойчивых собственных корней при различных q и κ не зависят от ранга матрицы. Численный счет показывает, что при $q \neq 0$ всегда имеются собственные числа $\gamma^2 > 0$, т.е. что рассматриваемые периодические решения всегда неустойчивы. Однако при $\kappa \rightarrow 1$ решение (3.64) переходит в солитон, для которого данный метод уже неприменим. Поскольку формально переход к солитону соответствует исчезновению квазипульса ($k_0q \rightarrow 0$), то из обращения γ в нуль при $q = 0$ следует, что солитон устойчив. Строгое доказательство устойчивости одномерного солитона в рамках одномерного НУШ можно провести методом ОЗР.

Рассмотрим теперь устойчивость одномерного солитона. Для этого исходим из системы уравнений (3.59), (3.61), где f – солитонное решение уравнения (3.54). Положим, как и раньше, зависимость от времени в виде (3.63). Введем иерархию малых параметров $\gamma \sim k \gg k^2$. Соответственно положим $\varphi_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ Тогда в нулевом приближении имеем

$$L_1 u_0 = 0, \quad L_2 v_0 = 0. \quad (3.69)$$

В следующих приближениях из (3.59), (3.61) следует

$$L_1 u_1 = -\gamma v_0; \quad L_2 v_1 = \gamma u_0; \quad (3.70)$$

$$L_1 u_2 = \gamma u_1 + ak^2 \iint u_0 d\xi' d\xi''; \quad (3.71)$$

$$L_2 u_2 = -\gamma u_1 - ak^2 \iint v_0 d\xi' d\xi''. \quad (3.72)$$

Решения (3.69) выберем в виде

$$u_0 = \partial \xi f, \quad v_0 = 0. \quad (3.73)$$

Подставляя (3.73) в (3.70), находим

$$u_1 = 0, \quad v_1 = (\gamma/2) \xi f. \quad (3.74)$$

Из (3.72) получаем $v_2 = 0$, а из (3.71)

$$L_1 u_2 = -(\gamma^2/2) \xi f + ak^2 \iint f d\xi. \quad (3.75)$$

Умножая (3.75) на f' и интегрируя по ξ , получаем после интегрирова-

ния по частям с учетом $L_1 f' = 0$:

$$\gamma^2 = 4\alpha k^2. \quad (3.76)$$

Из (3.76) следует, что при $\alpha > 0$, т.е. когда $\omega_{Be} < \omega_{pe}$ (слабо замагниченная плазма) одномерный солитон неустойчив. В сильно замагниченной плазме ($\omega_{pe} < \omega_{Be}$) одномерные ленгмюровские солитоны устойчивы. Одномерная ленгмюровская турбулентность рассматривается в [3.9].

3.4. КОЛЛАПС И КАВИТОНЫ

Выше было показано, что в слабо замагниченной плазме ($\omega_{pe} > \omega_{Be}$) в трехмерном пространстве нет устойчивых стационарных волн. Вопрос об эволюции волнового пакета в такой среде рассматривался во многих работах [3.4, 3.10–3.13]. Ввиду сложности проблемы строгих аналитических результатов здесь немного. Однако существует большое количество работ, где с помощью ЭВМ прослеживалась эволюция волнового пакета с разными начальными данными. В настоящее время уже нет сомнения, что достаточно компактный волновой пакет, описываемый НУШ (3.7) или уравнением Захарова (3.36) с конечными значениями интегралов числа частиц N и гамильтониана H при $H < 0$, сжимается с увеличением амплитуды. Если же $H > H_s > 0$ (H_s — значение гамильтониана на трехмерном солитонном решении), то пакет расплывается. Эффект самопроизвольного сжатия волнового пакета под действием нелинейности был открыт В.Е. Захаровым [3.4] и назван коллапсом. Качественное исследование этого явления можно привести на примере НУШ, следуя [3.10].

Введем среднеквадратический размер волнового пакета $R = (M/N)^{1/2}$, где

$$M = \int r^2 |\psi|^2 d^3x; \quad N = \int |\psi|^2 d^3x. \quad (3.77)$$

Здесь r — радиальная координата в сферической системе координат.

Согласно (3.77) N является интегралом движения. Рассмотрим, как эволюционирует M . С помощью НУШ (3.7) находим

$$\partial_t^2 M = 2mH - 2(m-2) \int |\nabla \psi|^2 d^3x, \quad (3.78)$$

где m — размерность пространства.

Поскольку H также является интегралом движения, из (3.78) при $m \geq 2$ получаем оценку

$$\partial_t^2 M \leq 2mH \quad (3.79)$$

или

$$M \leq mHt^2 + a_1 t + a_2, \quad (3.80)$$

где $a_{1,2}$ — константы интегрирования.

Отсюда видно, что при $H < 0$ эффективный размер пакета с некоторого момента времени начинает уменьшаться и обращается в нуль за конечное время. Из сохранения N и H следует, что амплитуда пакета при этом стремится к бесконечности. В реальных условиях до этого момента уравнение (3.80) становится уже неприменимым и в действие вступают эффекты, которыми при выводе НУШ пренебрегалось. Это могут быть дисперсионные поправки (члены с более высокими производными) или члены с более высокими степенями нелинейности. Оба эти эффекта при достижении малых размеров и большой амплитуды могут при подходящем знаке замедлить коллапс. Параметры, при которых коллапс прекращается, можно определить из критерия Вахитова—Колоколова (3.29). Предположим, что в результате коллапса образуется устойчивый солитон с амплитудой A . В рамках НУШ в трехмерном случае всегда $\partial_A N < 0$. Однако при учете поправочных членов, как было показано в [3.2], может оказаться, что $\partial_A N > 0$ при достаточно большой амплитуде. Амплитуду волнового пакета, при которой происходит задержка коллапса, можно определить и из (3.29), в котором необходимо учесть поправочные члены. Для ленгмюровских волн такое простое рассмотрение провести не удастся. Как показывает численный эксперимент, коллапс в этом случае хотя и имеет место, но протекает по другому сценарию, чем в рамках НУШ. Основное различие заключается в стремлении к потере симметрии. Если в процессе эволюции пакета в рамках НУШ он стремится к сферически симметричной форме, то в ленгмюровском коллапсе начальный сферически-симметричный пакет теряет эту симметрию. Кроме того, при большой амплитуде сжатие пакета происходит так быстро, что становится необходимым учет инерции ионов. Это несколько задерживает, но не останавливает коллапс [3.14]. Самой существенной поправкой в процессе коллапса ленгмюровских волн является затухание Ландау на электронах. Этот эффект возникает с приближением размера пакета к дебаевскому радиусу. При этом энергия коллапсирующего пакета начинает передаваться электронам в хвостовой части функции распределения. В результате в процессе коллапса появляются ускоренные электроны. В экспериментах это считается одним из признаков коллапса. Возникает вопрос: может ли затухание Ландау задержать коллапс подобно дисперсионным и нелинейным поправкам? В [3.5] указано, что это может иметь место при подходящем источнике энергии, который компенсировал бы потери, вызванные затуханием Ландау. В качестве источника может быть параметрическая неустойчивость ЭМ волны при лазерном нагреве плазмы или пучковая неустойчивость. Тогда уравнение Захарова (3.36) должно быть дополнено двумя членами. При этом вместо (3.36) имеем:

$$\nabla^2 \{i \partial_t \psi + \nabla^2 \psi\} + \text{div}(|\nabla \psi|^2 \nabla \psi) = \Gamma \psi - L \psi. \quad (3.81)$$

Здесь Γ — оператор, описывающий подкачку ленгмюровской волны в области малых волновых чисел; L — оператор, учитывающий затуха-

ние Ландау на электронах. Оба эти оператора задаются в линейном приближении их фурье-образами в пространстве волновых чисел. Для оператора L он известен:

$$L_k = \text{const } k^{-3} \exp(-k^{-2}), \quad (3.82)$$

где k – волновое число в единицах обратного дебаевского радиуса. Спектр же оператора Γ определяется свойствами источника в виде инкремента в k -пространстве. Стационарные локализованные решения уравнения (3.81) называют кавитонами; они были найдены численно в [3.5] методом стабилизирующего множителя. Решение ищется в виде $\psi = \varphi(r) \exp(i\Omega t)$, где Ω – частота кавитона. Она определяется в процессе вычислений как собственное число уравнения (3.81), при котором решение φ получается как функция, локализованная по всем направлениям.

В ряде экспериментальных работ по изучению взаимодействия плазмы с электромагнитной волной с частотой, близкой к плазменной частоте, были обнаружены сгустки ленгмюровских волн, в которых плотность плазмы была понижена. В [3.15] утверждалось, что такие сгустки появляются как следствие задержки сжатия пакетов ленгмюровских волн, образующихся в результате параметрической неустойчивости. Можно полагать, что упомянутые выше кавитоны соответствуют сгусткам, обнаруженным в эксперименте [3.15].

3.5. МУЛЬТИСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НУШ

Аналогично УКП дисперсионные поправки к НУШ также приводят к решениям в виде мультисолитонов. Только солитоны, составляющие мультисолитон УКП, бегут с одинаковой скоростью, а в мультисолитонах НУШ они имеют одинаковую скорость перемещения и частоту осцилляции. Отметим, что в двухмерном и трехмерном случаях НУШ и без поправки имеют сравнительно сложные солитонные решения. Эти решения зависят только от радиуса и многократно изменяют знак прежде, чем исчезают экспоненциально быстро на бесконечности [3.16].

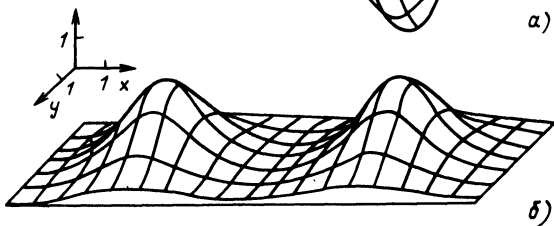
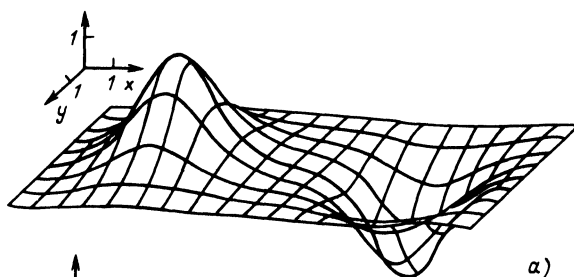
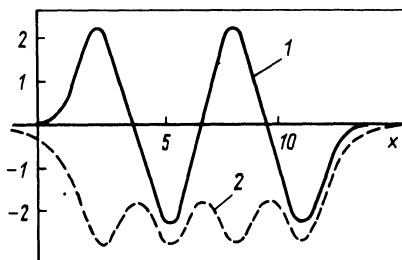
В [3.17] исследован интересный случай поправки к НУШ в виде нелокальной нелинейности, вызванной дисперсией низкочастотного (звукового) компонента, когда вместо НУШ рассматривается система, состоящая из уравнений высокочастотного и низкочастотного компонентов:

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi + \theta \psi = 0; \quad (3.83)$$

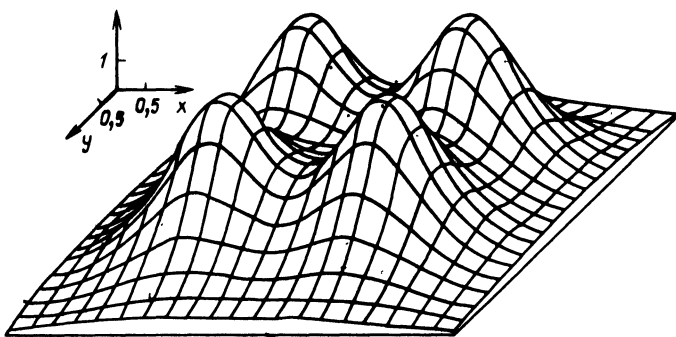
$$\theta - \beta \nabla^2 \theta = -|\psi|^2. \quad (3.84)$$

Эта система уравнений описывает, например, самовоздействие электромагнитных волн в плазме. Здесь ψ – безразмерная амплитуда волны; θ – относительное возмущение температуры. Эти же уравнения

Р и с. 3.2. Одномерное четырехсолитонное решение системы (3.84), (3.85) для профиля Φ (1) и профиля θ (2) (пунктир)



Р и с. 3.3. Двумерное двусолитонное решение системы (3.84), (3.85) для рельефа Φ (а) и рельефа θ (б)



Р и с. 3.4. Рельеф θ двумерного четырехсолитонного решения системы (3.84), (3.85)

описывают взаимодействие нуклонов с волновой функцией ψ посредством мезонного поля с потенциалом θ [3.18]. Амплитуда Φ стационарного решения (3.83) $\psi = \Phi(\mathbf{r}) \exp(iEt)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Phi + (\theta - E) \Phi = 0. \quad (3.85)$$

Как известно, при $\beta = 0$ солитонные решения (3.84), (3.85) в двумерном и трехмерном случаях неустойчивы. Пользуясь критерием Вахитова–Колоколова (3.29), можно показать, что при $\beta > 0$ солитоны с достаточно большим значением E становятся устойчивыми. Примерно в этом же случае появляются решения в виде мультисолитонов. Согласно [3.17] мультисолитонные решения уравнений (3.84) и (3.85) появляются при $\beta E > 1$. На рис. 3.2 показано одномерное решение этой системы при $\beta E = 4$, на рис. 3.3 — двумерное решение этой системы в виде бисолитона, а на рис. 3.4 — в виде четверного солитона.

В случае ядерного вещества [3.18] трехмерные уравнения (3.83), (3.84) также имеют мультисолитонное решение, что соответствует ядру, состоящему из нескольких нуклонов. При этом систему уравнений следует дополнить соответствующим числом нуклонов условием нормировки и принципом Паули. При больших энергиях ($\beta E \gg 1$) первым членом в (3.84) можно пренебречь, и тогда вместе с условиями нормировки получаем уравнение, описывающее кулоновское самовоздействие волновой функции. В этом случае уравнение (3.84) есть уравнение Пуассона.

Глава 4

ДИАМАГНЕТИЗМ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ И ЦИКЛОТРОННЫЕ СОЛИТОНЫ

4.1. НЕЛИНЕЙНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Циклотронные волны, электронные и ионные, имеют большое значение как эффективный источник дополнительного нагрева плазмы [4.1–4.3]. Большая мощность вводимого в плазму излучения (до нескольких мегаватт) приводит к появлению нелинейных эффектов, влияющих на распространение и поглощение волновых пучков. Экспериментальные наблюдения циклотронных колебаний [4.4, 4.5] свидетельствуют об их важной роли в поведении плазмы в лабораторных условиях. Широко распространены циклотронные волны и в магнитосфере Земли [4.6–4.9]. В частности, в авроральной области наблюдалось интенсивное излучение электромагнитных волн в диапазоне электромагнитных циклотронных частот, — так называемое километровое излучение Земли [4.7, 4.10]. В ряде случаев согласно наблюдениям цик-

лотронные волны имеют большие амплитуды и локализованы в пространстве [4.9], что может быть проявлением нелинейности.

Первый шаг для изучения сильно нелинейных циклотронных волн — вывод упрощенных уравнений, учитывающих лишь основные линейные и нелинейные эффекты. В ленгмюровских волнах вследствие определяющей зависимости ленгмюровской частоты от плотности плазмы основным механизмом, приводящим к обсуждавшимся выше сильно нелинейным эффектам, таким как коллапс волн или образование солитонов, является формирование ям плотности в области локализации волнового пакета. Частота циклотронных волн зависит в основном от внешнего магнитного поля. Поэтому, как показано в [4.11], основным нелинейным механизмом, определяющим поведение циклотронных волн, является образование ям постоянного магнитного поля в области локализации циклотронных волн.

Эффект уменьшения магнитного поля в области локализации волновых пакетов, названный в [4.11] ВЧ-диамагнетизмом, ранее обсуждался в [4.12–4.15]. В [4.16] найдено самофокусирующее влияние ВЧ-диамагнетизма на альфвеновские волны. Обычно ВЧ-диамагнетизм возникает благодаря диамагнитному току, который образуется в плазме поперек постоянного магнитного поля в области локализации волнового пакета под действием ВЧ-давления (пондеромоторной силы), действующего на плазму. В [4.14] при выводе выражения для диамагнитного ослабления магнитного поля в пакете δB не было учтено влияние пространственной дисперсии — нелокальности взаимодействия электрического поля с веществом, связанной с тепловым движением. Для холодной плазмы выражение для δB , полученное в [4.14], имеет вид:

$$\delta B = -\frac{1}{4} \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial B_0} E_{0i}^* E_{0k} \quad (4.1)$$

E_0 — комплексная амплитуда электрического поля колебаний; ϵ_{ik} — тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы.

В [4.17] прямым вычислением было получено выражение для нелинейного изменения магнитного поля δB с учетом пространственной дисперсии и нового эффекта — нелинейности циклотронного резонанса для потенциальных циклотронных волн (мод Бернштейна). В общем случае это выражение имеет вид:

$$\delta B = -\sum_{\omega', \omega''} \sum_{k', k''} \langle \varphi_{k'} \omega' \varphi_{k''} \omega'' \rangle \exp [i(k' + k'')r - i(\omega' + \omega'')t] \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \omega_{Bj}}{2B_0} \sum_n |k_{\perp}^j + k''|^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial |k'_\perp + k''_\perp|} |k'_\perp + k''_\perp| S_n^{(1)} + i \frac{k'_\perp k''_\perp}{n \omega_{Bj}^2} S_n^{(2)} \sin(\alpha_{k'} - \alpha_{-k''}) \right] \times$$

$$\times \frac{(n \omega_{Bj})^2}{(\omega' - n \omega_{Bj})(\omega'' + n \omega_{Bj})} \exp[in(\alpha_{k'} - \alpha_{-k''})], \quad (4.2)$$

где

$$S_n^{(p)} \equiv 2\pi \int_0^\infty v_\perp^2 (p-1) J_{1, k' + k''} J_{n, k'} J_{n, k''} \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_\perp} dv_\perp. \quad (4.3)$$

В (4.2) $\varphi_{k\omega}$ — фурье-компонент потенциала колебаний; ω_{pj} — ленгмюровская частота частиц сорта j ; ω_{Bj} — циклотронная частота; α_k — азимутальный угол в пространстве волновых векторов в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю \mathbf{B}_0 , направленному вдоль оси z ; $J_{n, k} \equiv J_n(k_\perp v_\perp / \omega_{Bj})$ — функция Бесселя n -го порядка; f_{0j} — невозмущенная функция распределения частиц; угловые скобки (...) означают усреднение по ВЧ-осцилляциям. При получении (4.2) предполагалось, что $\omega - n\omega_{Bj} \gg k_z v_{T\parallel j}$, где $v_{T\parallel j}$ — продольная тепловая скорость частиц. Выражение (4.2) применимо как для хаотических, так и для регулярных полей, имеющих произвольную поперечную длину волны. Рассмотрим сначала нелинейное изменение магнитного поля, вызванное турбулентностью. Проводя в (4.2) усреднение по хаотическим фазам, получаем

$$\delta B = \frac{1}{2} \sum_{k, \omega} k^2 |\varphi_{k\omega}|^2 \frac{\partial \epsilon(k, \omega)}{\partial B_0}, \quad (4.4)$$

где

$$\epsilon(k, \omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \sum_n 2\pi \int_0^\infty J_{n, k}^2 \frac{n \omega_{Bj}}{\omega - n \omega_{Bj}} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_j} dv_\perp \quad (4.5)$$

— диэлектрическая проницаемость потенциальных волн. Отметим, что в (4.4) дифференцирование по B_0 относится только к циклотронной частоте в резонансном знаменателе в (4.5). Формула (4.4) имеет вид, аналогичный (4.1). В приближении холодной плазмы, когда $n = \pm 1$ и $k_\perp r_{Bj} \ll 1$, где r_{Bj} — ларморовский радиус частиц сорта j , для достаточно узкого по частоте спектра волн из (4.4) получим:

$$\delta B = \frac{1}{4} \frac{\partial \epsilon}{\partial B_0} |\nabla \psi|^2, \quad (4.6)$$

где ψ — амплитуда потенциала колебаний в координатном пространстве.

Для регулярных колебаний выражение (4.2) примет вид, аналогичный (4.4), только при условиях $|k'_\perp + k''_\perp| r_{Bj} \ll 1$ и $k'_\perp r_{Bj}^2 \Delta\alpha_k \ll 1$, где $\Delta\alpha_k$ — разброс волновых векторов по углам. Все остальные случаи формулой типа (4.6) не охватываются. В [4.17] получено, в частности, выражение для нелинейного магнитного поля в случае коротковолновых циклотронных колебаний с $k'_\perp r_{Bj} \gg 1$, обладающих цилиндрической симметрией с осью вдоль внешнего магнитного поля. Для данного сорта частиц оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta B = & \frac{\pi}{2B_0 r_{Bj}^4} \sum_{\omega', \omega''} \frac{n^2 \omega_{pj}^2}{(\omega' - n\omega_{Bj})(\omega'' + n\omega_{Bj})} \times \\ & \times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dk'_\perp dk''_\perp}{(2\pi)^4} \langle \varphi_{k'_\perp \omega'} \varphi_{k''_\perp \omega''} \rangle J_0(|k'_\perp - k''_\perp| r_\perp) \times \\ & \times I_1[2(k'_\perp - k''_\perp)^2 r_{Bj}^2] \exp[-2(k'_\perp - k''_\perp)^2 r_{Bj}^2], \end{aligned} \quad (4.7)$$

где r_\perp — расстояние от оси симметрии; I_1 — функция Бесселя мнимого аргумента; $r_{Bj} = [T_{\perp j} / (2m_j \omega_{Bj}^2)]^{1/2}$, $n > 0$. Функция распределения f_{0j} считается максвелловской.

4.2. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Нелинейное уравнение, описывающее циклотронные волны конечной амплитуды, получается, как и в случае ленгмюровских колебаний, с помощью решения дисперсионного уравнения $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ для циклотронных волн $\omega = n\omega_{Bj}(1 + R_j)$, где $R_j \ll 1$, и учета нелинейной поправки к циклотронной частоте. Если электрический потенциал представить в виде осциллирующей функции с частотой $n\omega_{Bj}^0$ и огибающей ψ

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-in\omega_{Bj}^0 t) + \text{к.с.} \}, \quad (4.8)$$

то уравнение для ψ в параболическом приближении при $k'_\perp r_{Bj} \ll 1$ принимает вид:

$$\nabla^2 \left(\frac{i}{n\omega_{Bj}^0} \partial_t \psi - Q_{n,j} \psi \right) = \text{div}(h \nabla \psi),$$

$$h = -a_{n,j} |\chi|^2;$$

$$\frac{i}{n\omega_{Bj}^0} \partial_t \chi - h\chi = P_{n,j} \psi, \quad (4.9)$$

где $h = \delta B/B_0$ – относительная глубина магнитной ямы; $a_{n,j} = (4n! r_{Dj}^2 B_0^2)^{-1}$; $r_{Dj} = (T_{\perp j}/m_j)^{1/2} \omega_{pj}^{-1}$ – дебаевский радиус, $P_{n,j} \equiv r_{Bj}^n (\partial_x + i\partial_y)^n$. Нелинейный член в уравнении для функции χ возник в результате учета нелинейного изменения циклотронной частоты в резонансных знаменателях в (4.2).

Уравнения (4.9) применимы для электронных и ионных циклотронных колебаний. В первом случае $Q_{n,e} = \alpha_{n,e} |P_{n-1,e}|^2$, где

$$\alpha_{n,e} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} \frac{(n^2-1)\omega_{pe}^2}{(n^2-1)(\omega_{Be}^0)^2 - \omega_{pe}^2} \quad (4.10)$$

(при $n=1$ величину ω_{pe}^2 в знаменателе следует опустить). Во втором случае при условии $n\omega_{Bi} \ll k_z v_{T\parallel e}$ имеем $Q_{n,i} = \alpha_{n,i} |P_{n,i}|^2$, где

$$\alpha_{n,i} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp i}}. \quad (4.11)$$

В [4.18] с помощью системы уравнений (4.9) для электронных циклотронных колебаний на второй гармонике ($n=2$) рассмотрены модуляционная неустойчивость и самофокусировка монохроматической бегущей волны. Инкременты неустойчивостей γ растут с увеличением амплитуды. Для достаточно мощной волны $E_0/B_0 > (k_0 r_{Be})^2$ максимум инкремента модуляционной неустойчивости ($k_0 \parallel \mathcal{K}$) достигается при $\kappa \gg k_0$. Здесь E_0 – амплитуда электрического поля волны; k_0 – ее волновой вектор; \mathcal{K} – волновой вектор возмущений. При $\omega_{pe} \simeq \omega_{Be}^0$ по порядку имеем

$$\gamma \simeq (k_0 r_{Be})^{-2/3} (E_0/B_0)^{4/3} \omega_{Be}^0. \quad (4.12)$$

Максимум инкремента самофокусировки ($k_0 \perp \kappa$) достигается при $\kappa \sim k_0$ и при $\omega_{pe} \sim \omega_{Be}^0$ для мощной волны по порядку равен

$$\gamma \simeq (E_0/B_0) \omega_{Be}^0. \quad (4.13)$$

Отметим, что при $[k_0, \mathcal{K}]_z \neq 0$ неустойчивость беспороговая.

Уравнения (4.9) допускают стационарные решения – одномерные или зависящие от радиуса в цилиндрической системе координат. Рас-

смотрим случай ионно-циклотронных волн на первой гармонике ($n = 1$) как наиболее простой и важный [4.17]. Ищем решение в виде

$$\psi = \frac{2^{1/2}}{g_i^{1/2} \mu} A^3 B_0 f(\rho) \exp(iA^2 \omega_{Bi}^0 t),$$

$$h = -A^2 F(\rho), \quad (4.14)$$

где

$$g_i = \omega_{pi}^2 / (\omega_{Bi}^0)^2; \quad \rho = \mu r_{\perp}; \quad \mu = (T_{\perp i} / T_{\parallel e})^{1/2} A r_{Bi}^{-1}; \quad A^2 \ll 1.$$

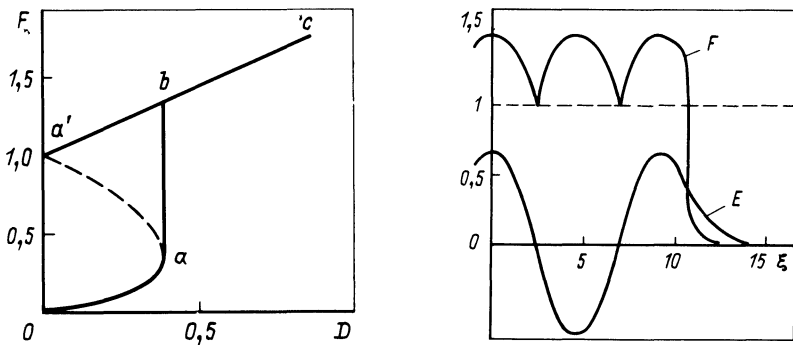
Подставляя (4.14) в систему (4.9), получаем:

$$\operatorname{div}(1 - \nabla^2) \mathbf{E} = \operatorname{div}(F \mathbf{E}); \quad (4.15)$$

$$F(1 - F)^2 = D^2 \equiv |E_x + iE_y|^2, \quad (4.16)$$

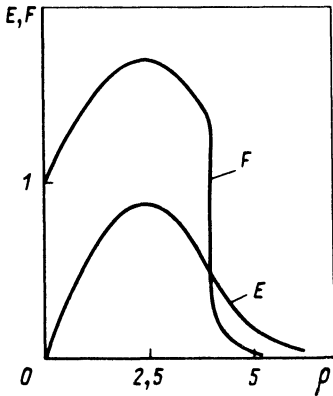
где $\mathbf{E} = \nabla f$; f – безразмерная амплитуда потенциала.

Согласно (4.14) функция F определяет пространственную зависимость глубины магнитной ямы. Из (4.16) следует, что в стационарном случае зависимость глубины ямы от амплитуды электрического поля D неоднозначна. В реальных условиях осуществляется зависимость, где $dF/dD > 0$, обозначенная на рис. 4.1 сплошной линией. Участок aa' не реализуется, так как на нем глубина ямы уменьшается с ростом D . На участке ab в окрестности точного циклотронного резонан-



Р и с. 4.1. Зависимость глубины магнитной ямы от амплитуды напряженности электрического поля в стационарном случае (в безразмерных единицах)

Р и с. 4.2. Одномерное стационарное решение уравнений ионно-циклотронных волн на первой гармонике. Видно, что циклотронные волны могут приводить к образованию периодической структуры постоянного магнитного поля в виде доменов (кривая F)



Р и с. 4.3. Решение уравнений ионно-циклотронных волн в виде осесимметричного солитона, вытянутого вдоль магнитного поля (в безразмерных единицах)

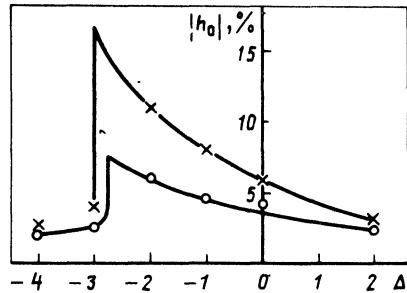
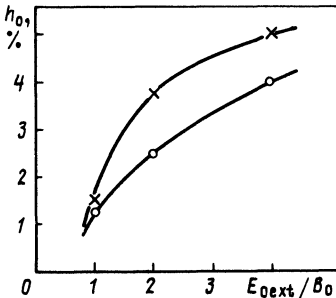
са ($F = 1$) глубина магнитной ямы меняется скачкообразно. Таким образом, точка b является точкой ветвления.

Если все величины в (4.15) зависят только от безразмерной координаты ξ ($\xi \equiv \mu x$), то E направлено вдоль ξ . Для этого случая решение системы (4.15) и (4.16) приведено на рис. 4.2.

При $\xi < 10$ имеем периодическое решение, в котором реализуется зависимость $a'bc$ (рис. 4.1). При $\xi = 10,7$ глубина ямы в точке b срывается к точке a и в дальнейшем с ростом ξ решение стремится к нулю.

В случае, когда f в (4.14) зависит только от радиуса ρ ($\rho = \mu r_1$), в цилиндрической системе координат E направлено вдоль радиуса. При этом (4.15) и (4.16) имеют решение, приведенное на рис. 4.3.

Из рисунка видно, что на границах локализованных стационарных решений обязательно имеет место скачок магнитного поля, а также ВЧ-давления (из-за резонансной зависимости последнего от магнитного поля). Реализуется тангенциальный разрыв с токовым слоем, аналогичный известному решению для МГД-уравнений [4.13], причем ве-



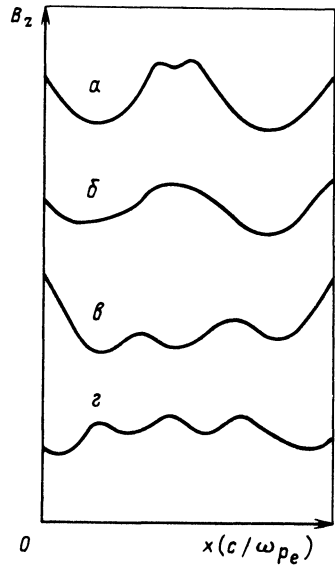
Р и с. 4.4. Зависимость относительной глубины магнитной ямы $|h_0|$ от Δ при $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,25$ ($\omega_{pe} = \omega_{Be}^0$, $k_0^2 r_{De}^2 = 0,2$):

х — теория; о — численный эксперимент

Р и с. 4.5. Зависимость относительной глубины магнитной ямы от E_{ext}^0 при $\Delta = 0$ ($\omega_{pe} = \omega_{Be}^0$, $k_0^2 r_{De}^2 = 0,2$):

х — теория; о — численный эксперимент

Рис. 4.6. Усредненный по времени профиль магнитного поля $B_z(x)$ ($0 \leq x \leq L_0$) для случаев стоячей волны накачки при $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,25$ ($k_0 L_0 = 2\pi$) (а), бегущей волны накачки при $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,1$ ($k_0 L_0 = 2\pi$) (б), бегущей волны накачки при $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,175$ ($k_0 L_0 = 2\pi$) (в) и бегущей волны накачки при $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,06$ ($k_0 L_0 = \pi/2$) (г)



личина скачка магнитного поля дается уравнением (4.16) и рис. 4.1. При этом суммарное давление остается непрерывным благодаря скачку ВЧ-давления.

В [4.18] проведено численное исследование диамагнитного эффекта для потенциальных электронно-циклотронных волн на второй гармонике.

В [4.19] описаны основные черты использованной плазменной модели. Рассмотрены случаи, когда в плазме задавалось внешнее электрическое поле E_{ext} в виде стоячей и бегущей волн. При задании стационарной стоячей волны

$$E_{\text{ext}} = E_{\text{ext}}^0 \cos [(2\omega_{Be}^0 + \delta\omega_0)t] \cos(k_0 x) \quad (4.17)$$

с помощью системы (4.9) в стационарном случае можно получить уравнение, определяющее качественную зависимость характерной глубины магнитной ямы $|h_0|$ от амплитуды внешнего поля

$$|h_0| (\Delta + |h_0|)^2 = D_0^2, \quad (4.18)$$

где

$$\Delta = \Omega_0 + a_{2,e} k_0^2 r_{Be}^2; \quad D_0 = 2^{-3/2} k_0^2 r_{Be}^2 E_{\text{ext}}^0/B_0;$$

$$\Omega_0 = \delta\omega_0/(2\omega_{Be}^0); \quad a_{2,e} = -(3/4) \{ \omega_{pe}^2/[3(\omega_{Be}^0)^2 - \omega_{pe}^2] \}.$$

При $\Delta = 0$ частота внешнего поля совпадает с частотой собственных колебаний.

Целью численных экспериментов была опытная проверка двух теоретических зависимостей, определяемых уравнением (4.18): $|h_0| = f_1(\Delta)$ при $E_{\text{ext}}^0 = \text{const}$ и $|h_0| = f_2(E_{\text{ext}}^0)$ при $\Delta = 0$. Значения $|h_0|$ при заданных полях, взятые из эксперимента, сравнивались с теоретическими. На рис. 4.4 и 4.5 приведены соответствующие кривые. Видно хорошее согласие теории с численным экспериментом. Скачок на рис. 4.4 связан с сохранением однозначной зависимости $|h_0|$ от Δ .

На рис. 4.6 (кривая *a*) изображен усредненный по времени профиль магнитного поля для волны накачки $E_{\text{ext}} \sim \cos(k_0 x)$, где $k_0 = 2\pi/L_0$ (L_0 – длина системы). Видно образование двух ям. Этот же результат следует из (4.9).

Цель численных экспериментов в [4.18] с бегущей волной состояла в рассмотрении модуляционной неустойчивости и сравнении численных результатов с теоретическими. На рис. 4.6 (кривые *b*, *в*) представлены усредненные по времени профили магнитного поля для двух значений амплитуды волны накачки (соответственно $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,1$ и $E_{\text{ext}}^0/B_0 = 0,175$) в случае $\Delta = 0$. Первому значению соответствует профиль с двумя ямами, второму – с тремя. Эти результаты хорошо согласуются с [4.18]. На рис. 4.6 (кривая *г*) приведен также усредненный по времени профиль магнитного поля, когда параметры, следующие из теории, задавались из условия образования четырех ям, что экспериментально подтвердилось.

Таким образом, путем численного моделирования магнитоактивной плазмы в [4.18–4.19] подтверждено существование диамагнитного эффекта.

В [4.20] диамагнитный эффект на второй гармонике электронной циклотронной частоты был обнаружен экспериментально.

4.3. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОРОТКОВОЛНОВЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим случай, когда характерная длина волны потенциальных колебаний поперек магнитного поля меньше ларморовского радиуса: $k_{\perp} r_{Bj} \gg 1$. В то же время предположим, что амплитуда колебаний мало меняется на расстоянии порядка ларморовского радиуса, т.е. рассмотрим узкий в \mathbf{k} -пространстве волновой пакет (квазимонохроматическую бегущую волну) при условии $|\mathbf{k}'_{\perp} + \mathbf{k}''_{\perp}| r_{Bj} \ll 1$. Из этих неравенств следует, что разброс по углам $\Delta\alpha_{\mathbf{k}}$ и длинам Δk_{\perp} волновых векторов мал: $\Delta\alpha_{\mathbf{k}} \ll (k_{\perp} r_{Bj})^{-1}$ и $(\Delta k_{\perp} r_{Bj})^2 \ll 1$.

Введем функции $\chi(\mathbf{r}, t)$ и $\mu(\mathbf{r}, t)$:

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\nabla\mu(\mathbf{r}, t) = \sum_{\omega} \frac{n\omega_{Bj}^0}{\omega - n\omega_{Bj}} \mathbf{E}_{\omega} \exp(-i\omega t), \quad (4.19)$$

где $\mathbf{E}_{\omega} = -\nabla\varphi_{\omega}$. Тогда, используя асимптотики функций Бесселя при рассматриваемых условиях для колебаний вблизи n -й гармоники циклотронной частоты ω_{Bj} в случае очень узких волновых пакетов, когда $\Delta\alpha_{\mathbf{k}} \ll (k_{\perp} r_{Bj})^{-2}$, получаем из (4.2) следующее выражение для δB [4.21]:

$$\delta B = - \frac{2\omega_{pj}^2 \omega_{Bj}^0}{\sqrt{\pi} B_0 \nu_{T_{1j}}^3 k_{\perp 0}} |\mu|^2, \quad (4.20)$$

где $\nu_{T_{1j}} = (2T_{1j}/m_j)^{1/2}$, $k_{\perp 0} \cong k'_\perp \cong k''_\perp$. Как и выше, функция распределения f_{0j} считается максвелловской.

Если разброс по углам $\Delta\alpha_k$ мал, но конечен, т.е. $(k_\perp r_{Bj})^{-2} \ll \Delta\alpha_k \ll (k_\perp r_{Bj})^{-1}$, то

$$\delta B = i \frac{\omega_{pj}^2}{2\sqrt{\pi} B_0 k_{\perp 0} \nu_{T_{1j}}^n \omega_{Bj}^0} [\chi, \chi^*]_z. \quad (4.21)$$

Отметим, что формулу (4.20) можно записать в виде

$$\delta B = \frac{1}{4} \frac{\partial \epsilon}{\partial B_0} |\partial_x \psi + i \partial_y \psi|^2.$$

Таким образом, изменение магнитного поля связано в этом случае с действием ВЧ-давления. Формула (4.21) имеет принципиальное отличие от (4.20). Механизм образования нелинейного магнитного поля в данном случае не сводится к действию ВЧ-давления. Он аналогичен механизму возбуждения магнитного поля люнгмюровскими колебаниями в плазме без внешнего магнитного поля [4;22] и связан с неоднородностью амплитуды и фазы потенциала колебаний, приводящей к различию в фазах разных компонентов электрического поля. В частности, выражение (4.21) отлично от нуля для вращающихся полей [4.13]. Отметим, что δB в (4.21) может иметь разные знаки.

В [4.21] получены нелинейные уравнения, описывающие эволюцию амплитуды $\psi(\mathbf{r}, t)$ пакета коротковолновых циклотронных волн:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t + ik_{\perp 0} \mathbf{r}_\perp) + \text{к.с.} \},$$

где $k_{\perp 0}$ и ω_0 — несущие волновой вектор и частота пакета. В системе координат, движущейся с групповой скоростью, эти уравнения, полученные с помощью (4.19)–(4.21) и дисперсионного уравнения с учетом малых k_z , имеют вид

$$\frac{i}{n\omega_{Bj}^0} \partial_t \psi - \alpha \nabla_\perp^2 \psi + \beta \partial_z^2 \psi = -d_1 |\psi|^2 \psi \quad (4.22)$$

при $\Delta\alpha_k \ll (k_{\perp 0} r_{Bj})^{-2}$ и

$$\frac{i}{n\omega_{Bj}^0} \partial_t \psi - \alpha \nabla_{\perp}^2 \psi + \beta \partial_z^2 \psi = -d_2 [\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_{\perp} |\psi|^2]_z \psi \quad (4.23)$$

при $(k_{\perp 0} r_{Bj})^{-2} \ll \Delta \alpha_k \ll (k_{\perp 0} r_{Bj})^{-1}$. Здесь

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\delta}{k_{\perp 0}^2}; \quad \beta = \frac{1}{2n^2} \frac{T_{\parallel j}}{T_{\perp j}} \frac{r_{Bj}^2}{\delta}; \quad \delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega_{Bj}^0)^2 k_{\perp 0}^3 r_{Bj}^3};$$

$$d_1 \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{(\omega_{Bj}^0)^2}{\omega_{pj}^2} \frac{k_{\perp 0}^5 r_{Bj}^3}{B_0^2}; \quad d_2 \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{32n} \frac{(\omega_{Bj}^0)^2}{\omega_{pj}^2} \frac{k_{\perp 0}^5 r_{Bj}^5}{B_0^2}.$$

Максимальный инкремент неустойчивости монохроматической волны, определенный из (4.22), равен [4.21]

$$\gamma \simeq \frac{1}{8} \frac{(\omega_{Bj}^0)^2}{\omega_{pj}^2} (k_{\perp 0} r_{Bj})^3 \frac{E_0^2}{B_0^2} n \omega_{Bj}^0. \quad (4.24)$$

Инкремент самофокусировки, описываемый уравнением (4.23), растет с увеличением волнового вектора модуляции κ ($\kappa_{\perp} k_{\perp 0}$), причем неустойчивость является беспороговой (как и при $k_{\perp} r_{Bj} \ll 1$). В случае, когда дисперсионная поправка к частоте, определяемая только модуляцией κ , превышает нелинейную поправку

$$\gamma \simeq \frac{1}{10} \frac{(\omega_{Bj}^0)^2}{\omega_{pj}^2} \frac{\kappa_{\perp}}{k_{\perp 0}} (k_{\perp 0} r_{Bj})^5 \frac{E_0^2}{B_0^2} n \omega_{Bj}^0. \quad (4.25)$$

В [4.21] рассмотрена возможность существования стационарных решений — солитонов, описываемых уравнениями (4.22) и (4.23). В частности, из уравнения (4.22) следует, что солитон огибающей для очень узких волновых пакетов ограничен только вдоль магнитного поля (оси z). Характерный размер солитона L_z вдоль оси z равен

$$L_z \simeq A^{-1} \frac{\omega_{Bj}^0}{\omega_{pj}} \left(\frac{T_{\parallel j}}{T_{\perp j}} \right)^{1/2} (k_{\perp 0} r_{Bj})^{3/2} r_{Bj}, \quad (4.26)$$

где $A \ll 1$ — безразмерная амплитуда солитона.

4.4. САМОФОКУСИРОВКА И ТРЕХМЕРНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЦИКЛОТРОННОЙ ВОЛНЫ, БЕГУЩЕЙ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предыдущих параграфах было рассмотрено влияние нелинейного изменения магнитного поля на потенциальные циклотронные волны. Исследуем теперь аналогичный эффект для электромагнитных циклотронных волн. Сначала рассмотрим волны, бегущие вдоль магнитного поля [4.23].

Известно, что при распространении пучка электромагнитных волн нелинейное изменение показателя преломления N при соответствующем знаке пространственной дисперсии приводит к самофокусировке [4.24].

В обзоре [4.25] рассматривалась самофокусировка электромагнитных волн в плазме, вызванная изменением N в результате понижения плотности внутри пучка под действием ВЧ-давления.

При распространении необыкновенной волны в плазме вдоль магнитного поля показатель преломления существенно зависит от напряженности магнитного поля. В этом случае нелинейное изменение N происходит также вследствие уменьшения магнитного поля внутри волнового пакета. Для достаточно коротких дугов волн диамагнетизм может оказаться основным нелинейным эффектом, влияющим на распространение необыкновенной волны.

Дисперсионное уравнение для необыкновенной электромагнитной волны с частотой ω , распространяющейся под малым углом к внешнему магнитному полю B_0 , направленному вдоль оси z , получается из выражения для $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ в холодной плазме [4.26] :

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})} + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{Be}}{2(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega - \omega_{Be})} N_{\perp}^2;$$

$$N_{\perp}^2 \equiv \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}. \quad (4.27)$$

При выводе уравнения (4.27) предполагалось, что

$$1 \gg \frac{\omega + \omega_{Be}}{2\omega} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{|\omega^2 - \omega_{pe}^2|} \quad \text{и} \quad \omega - \omega_{Be} \gg k_z v_{Te}.$$

(Отметим, что при $\omega \simeq \omega_{pe}$ $k^2 c^2 \simeq \omega^2$.) Считаем, что ω близка к ω_{Be} , но меньше ее: $|\omega - \omega_{Be}| < \omega < \omega_{Be}$. Учтем в правой части (4.27) медленные нелинейные изменения плотности и магнитного поля: $n = n_0 + \delta n$, $B = B_0 + \delta B$. Тогда для стационарной бегущей волны (условие стационарности приведено ниже) с компонентом электрического поля

$$E_x = (1/2)E_{\perp}(r_{\perp}, z) \exp(-i\omega t + ik_{0z}z) + \text{к.с.}$$

(фаза компонента E_y сдвинута относительно фазы E_x почти на $\pi/2$) и медленно меняющейся амплитудой E_{\perp} вдоль оси z :

$$\partial_z \ll k_{0z}, \text{ где } k_{0z} = (\omega/c)(1+a)^{1/2}, a = -(\omega_{pe}^0)^2/[\omega(\omega - \omega_{Be}^0)],$$

где ω_{pe}^0 и ω_{Be}^0 — невозмущенные плазменная и циклотронная частоты, получим с помощью (4.27) следующее уравнение:

$$i\partial_{\xi} E_{\perp} + \frac{\sigma}{1-F} \nabla_{\eta}^2 E_{\perp} + \frac{a}{1-F} \left(F + \frac{\delta n}{n_0} \right) E_{\perp} = 0 \quad (4.28)$$

Здесь

$$F = \frac{\omega_{Be}^0}{\omega - \omega_{Be}^0} \frac{\delta B}{B_0}; \quad a = \frac{a}{2(1+a)^{1/2}}; \quad \xi = \frac{\omega z}{c}; \quad \eta = qr_{\perp};$$

$$q = \left[\frac{4(1+a)^{1/2}}{a} \frac{|\omega^2 - (\omega_{pe}^0)^2|}{c^2} \frac{\omega}{\omega_{Be}^0} \right]^{1/2};$$

$$\sigma = \text{sign} [\omega^2 - (\omega_{pe}^0)^2].$$

Из (4.28) видно, что нелинейность содержится как в числителе, так и в знаменателе. При $F = 1$ частота колебаний ω совпадает с локальной циклотронной частотой $\omega_{Be} = \omega_{Be}^0(1 + \delta B/B_0)$.

Выражение для нелинейной поправки к магнитному полю δB получается способом, аналогичным изложенному выше для потенциальных колебаний. В случае $E_{\perp} \gg E_z$, $k_z \gg k_{\perp}$, $k_{\perp} r_{Bj} < 1$, $\omega \simeq n\omega_{Bj}$ для стационарных колебаний

$$(1 - F_n)^2 F_n = A_n;$$

$$A_n = - \frac{n}{2(n-1)!} \frac{(\omega_{pj}^0)^2 n \omega_{Bj}^0 |P_{n-1,j} E_{\perp}|^2}{(\omega - n\omega_{Bj}^0)^3 B_0^2}, \quad (4.29)$$

где $F_n = [n\omega_{Bj}^0/(\omega - n\omega_{Bj}^0)](\delta B/B_0)$. Отсюда следует, что $\delta B < 0$, т.е. под действием ВЧ-давления образуется магнитная яма.

На медленные нелинейные изменения плотности рассматриваемые колебания оказывают наиболее сильное влияние в результате действия нелинейной силы Лоренца, вызывающей перемещение плазмы вдоль магнитного поля. Если характерная длина неоднородности L амплитуды электрического поля колебаний вдоль магнитного поля меньше величины $v_{Tj}\tau$, где τ — время излучения волнового пучка источником,

а v_{Tj} — тепловая скорость частиц сорта j вдоль магнитного поля, то реализуется статический режим как для электронов, так и для ионов. В этом случае выражение δn в случае стационарных колебаний вблизи n -й гармоники циклотронной частоты равно δn_s , где

$$\delta n_s = - \frac{n}{(n-1)!} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega(\omega - n\omega_{Bj})} \frac{|P_{n-1,j} E_{\perp}|^2}{8\pi(T_{\parallel e} + T_{\parallel i})}. \quad (4.30)$$

Здесь индекс j обозначает сорт частиц, испытывающих действие нелинейной силы Лоренца. Отметим, что $\delta n_e = \delta n_i = \delta n$, т.е. плотность меняется квазинейтрально.

Если длительность существования волнового импульса достаточно мала ($\tau < L/v_{Tj}$), то электроны и ионы не успевают распределиться по Больцману вдоль магнитного поля внутри волнового пучка. В этом динамическом режиме, при условии действия нелинейной силы Лоренца на электроны, получим с учетом квазистатического поля разделения зарядов следующие выражения для усредненных нелинейных изменений плотности электронов и ионов:

$$\left. \begin{aligned} \delta n_{de} &= (\omega_{pi}^{-2} \partial_t^2 + 1) (m_e/m_i) \langle n_{de}^{(2)} \rangle; \\ \delta n_{di} &= (m_e/m_i) \langle n_{de}^{(2)} \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

где $\langle n_{de}^{(2)} \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 \langle n_{de}^{(2)} \rangle = - \frac{(T_{\parallel e} + T_{\parallel i})}{m_i} \partial_z^2 \delta n_s. \quad (4.32)$$

Сравним эффект ВЧ-диамагнетизма и нелинейное изменение плотности при $\omega \simeq \omega_{Be}$. Величина $\delta n_s/n_0$ в $\omega(\omega_{Be}^0 - \omega) (k_z v_{Te})^{-2} \gg 1$ раз больше F в уравнении (4.28) для электронно-циклотронных колебаний вблизи первой гармоники ($n=1, F=F_1$) [см. (4.29) и (4.30)]. Поэтому для достаточно длительных волновых импульсов ($\tau > L/v_{Tj}$), когда успевает установиться больцмановское распределение для медленных нелинейных изменений плотности электронов и ионов, диамагнитный эффект несуществен. Отметим, что нестационарностью в уравнении (4.28) можно пренебречь при $\tau > L/v_g$, где v_g — групповая скорость волны вдоль магнитного поля. В данном случае это условие заведомо выполнено, поскольку $v_g \gg v_{Tj}$.

Если волновой импульс достаточно короткий ($\tau < L/v_{Tj}$), то, как следует из уравнений (4.31) и (4.32), $\delta n_{de} \sim \max \{ (\omega_{pi} \tau)^{-2}, 1 \} \times c_s \tau / L)^2 \delta n_s$, где c_s — скорость ионного звука. Считая импульс волны не слишком коротким: $(\omega_{pi} \tau > 1)$, получаем, что диамагнитный эффект

в уравнении (4.28) превышает нелинейное изменение плотности. при выполнении условия

$$\frac{(\omega - \omega_{Be}^0)^2 c^2 \tau^2 m_e}{(\omega_{pe}^0)^2 L^2 m_i} < 1. \quad (4.33)$$

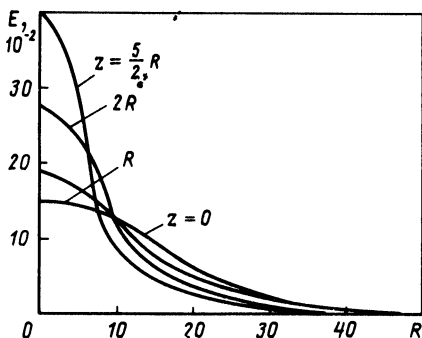
Это условие вместе с неравенством $\tau < L/v_{Tj}$ ограничивает время жизни волнового пучка. С другой стороны, пучок должен быть достаточно длительным ($\tau > L/v_g$), чтобы его поведение могло описываться стационарным уравнением (4.28). Легко проверить, что это неравенство совместимо с (4.33). Отметим, что в промежуточном случае ($L/v_{Te} < \tau < L/v_{Ti}$) в сверхзвуковом режиме в неравенстве (4.33) вместо L следует подставить поперечный размер пучка R .

Уравнение (4.28) совместно с выражениями (4.29) и (4.30) или уравнениями (4.31) и (4.32) для электронно-циклотронных колебаний на первой гармонике описывает самофокусировку волнового пучка при достаточно большой амплитуде. Как показано в [4.23], в случае, когда диамагнетизм является основным нелинейным эффектом, самофокусировка возможна при $\omega_{Be}^0 > \omega_{pe}^0$ ($\sigma > 0$). Характерная длина самофокусировки вдоль магнитного поля, когда амплитуда волны превышает пороговое значение E_{II} при $a \gg 1$ равна

$$L \sim (\omega - \omega_{Be}^0)^2 (\omega_{pe}^0)^2 \frac{B_0}{|E_{\perp}|} R,$$

где R — радиус пучка. Эта длина может быть меньше характерного размера изменения магнитного поля. Таким образом, в случае циклотронного нагрева мощной волной в неоднородном магнитном поле место нагрева, определенное по линейной теории, может сместиться на значительное расстояние из-за самофокусировки.

Поскольку уравнение (4.28) содержит нелинейность не обычным образом, то оно решалось численно для волнового пучка с осевой сим-



Р и с. 4.7. Эволюция распределения безразмерной амплитуды $E = \sqrt{A_1(E_{\perp}^2)}$

на фронте пучка по его радиусу в зависимости от координаты z при $a = 1$ (начальный радиус пучка $50q^{-1}$, начальная амплитуда в центре пучка $E_0 = 0,15, E_{II} = 0,1$)

метрий и с учетом только диамагнитного эффекта при условии (4.33) [4.23]. На рис. 4.7 показана эволюция распределения амплитуды электрического поля по радиусу (самофокусировка).

Диамагнитный эффект и нелинейное изменение плотности могут приводить к трехмерной локализации волнового пакета собственных колебаний плазмы с образованием солитона огибающей.

Выделим основную частоту пакета ω_0 и соответствующий ей волновой вектор k_{0z} . Пусть амплитуда электрического поля **мало** меняется за время прохождения пакетом расстояния, равного его характерному размеру L вдоль магнитного поля. Тогда решение уравнения для амплитуды электрического поля E_{\perp} можно искать в виде $E_{\perp} = E_{\perp}(z - v_g t, r_{\perp}, t)$. Учитывая только диамагнитный эффект, при выполнении условия (4.33), где $\tau = \tau_0 = L/v_g$, согласно (4.27) получаем:

$$i\partial_{\tau}E_{\perp} + \nabla_{\rho}^2 E_{\perp} + \partial_{\xi}^2 E_{\perp} + \beta|E_{\perp}|^2 E_{\perp} = 0, \quad (4.34)$$

где

$$\tau = \omega_{Be}^0 t; \quad \rho = (\Omega/c)(1+b)^{-1/2} r_{\perp}; \quad \xi = \Omega z/c;$$

$$\Omega^2 = (\omega_{pe}^0 \omega_{Be}^0)^2 / (\omega_0 - \omega_{Be}^0)^2 + 2\omega_0 \omega_{Be}^0;$$

$$b = - \frac{(\omega_{pe}^0)^2 \omega_{Be}^0}{2[\omega_0^2 - (\omega_{pe}^0)^2](\omega_0 - \omega_{Be}^0)}; \quad \beta = \frac{(\omega_{pe}^0)^4 \omega_0 \omega_{Be}^0}{2\Omega^2 (\omega_0 - \omega_{Be}^0) B_0^2};$$

$$v_g = \frac{2\omega_{Be}^0 k_{0z} c^2}{\Omega^2}.$$

Уравнение (4.34) получено при условиях: $|\omega_0 - \omega_{Be}^0| \gg \partial_t$; $k_{0z} \gg \partial_z$; $F \ll 1$. Это уравнение в отличие от (4.28) нестационарно.

Для стационарных решений $E_{\perp} \sim \exp(i\Gamma^2 \tau)$ уравнение (4.34) примет вид

$$\nabla^2 f = f - f^3. \quad (4.35)$$

Здесь $f = \sqrt{\beta}\Gamma^{-1}|E_{\perp}|$; $\nabla^2 = \nabla_{\rho'}^2 + \partial_{\xi'}^2$; $\rho' = \Gamma\rho$; $\xi' = \Gamma\xi$; Γ – безразмерная амплитуда, причем из условий рассмотрения следует, что $\omega_{Be}^0 \Gamma^2 < v_g/L < |\omega_0 - \omega_{Be}^0|$.

Уравнение (4.35) имеет солитонные решения (в частности, сферически-симметричные) с характерными размерами порядка единицы. Если частота колебаний ω_0 такова, что $\omega_0 |\omega_0 - \omega_{Be}^0| \ll (\omega_{pe}^0)^2$, то амплитуда колебаний $E_{\perp 0} \sim \beta^{-1/2} \Gamma < |\omega_0 - \omega_{Be}^0|^{3/2} B_0 / [\omega_{pe}^0 (\omega_{Be}^0)^{1/2}]$. При этом характерные размеры солитона огибающей по порядку равны

$$R \sim \frac{|\omega_0 - \omega_{Be}^0|^{3/2}}{(\omega_{Be}^0)^{3/2}} \frac{c}{\omega_{pe}^0} \frac{B_0}{E_{10}}; \quad L \sim \frac{(\omega_0 - \omega_{Be}^0)^2}{(\omega_{pe}^0)^2} \frac{c}{\omega_{Be}^0} \frac{B_0}{E_{10}}.$$

Отметим, что в этом случае условие (4.33) имеет вид $(m_e/4m_i) \times [\omega_{Be}^0/|\omega_0 - \omega_{Be}^0|] < 1$. Это неравенство легко выполняется. Таким образом, диамагнетизм является основным нелинейным эффектом, приводящим к образованию солитона огибающей для рассмотренных трехмерных пакетов циклотронных волн.

Отметим, однако, что согласно критерию Вахитова—Колоколова (2.39) солитонное решение уравнения (4.34) неустойчиво. Если энергия, заключенная в волновом пакете, больше энергии солитона таких же размеров, то такой пакет будет коллапсировать, если меньше — расплываться.

4.5. ДИАМАГНИТНАЯ САМОФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛН, БЕГУЩИХ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При высокочастотном нагреве плазмы часто используются электромагнитные волны, бегущие почти поперек внешнего магнитного поля [4.1—4.3]. В этом случае в области электронных частот в плазме возможны, как известно, две различные электромагнитные волны — необыкновенная и обыкновенная [4.26]. Для нагрева необыкновенной волной обычно используют вторую гармонику электронной циклотронной частоты, а при нагреве обыкновенной — первую гармонику. Очевидно, что исследование влияния нелинейных эффектов на распространение этих волн представляет практический интерес.

В [4.27] рассмотрена самофокусировка необыкновенной и обыкновенной циклотронных волн, связанная с диамагнитным эффектом. Учено также нелинейное изменение плотности и приведены условия, когда последним можно пренебречь.

Рассмотрим сначала самофокусировку необыкновенной волны. При $k_{\perp} \gg k_z$ имеем $E_{\perp} \gg E_z$, где $E_z \sim k_z E_{\perp} / k_{\perp}$. Здесь E и k — напряженность электрического поля и волновой вектор колебаний соответственно; ось z направлена вдоль магнитного поля B_0 . При условиях $\omega - n\omega_{Bj} \gg k_z v_{Tj} \gg n\omega_{Bj} (v_{Tj}/c)^2$ и $k_{\perp} r_{Bj} \ll 1$, где v_{Tj} — тепловая скорость частиц, найдем нелинейное изменение магнитного поля δB :

$$\delta B = - \sum_{j, n > 0} \frac{n^2 \omega_{pj}^2}{2n! B_0} \langle |\chi_+^{(n)}|^2 \rangle, \quad (4.36)$$

где $\chi_+^{(n)} = P_{n-1, j} \sum_{\omega} E_{\omega}^+ / (\omega - n\omega_{Bj}) \exp(-i\omega t)$. Здесь $E_{\omega}^+ = E_{x\omega} + iE_{y\omega}$ — фурье-гармоника электрического поля.

Из (4.36) видно, что в области локализации волнового пакета магнитное поле уменьшается. Отметим, что формула (4.36) справедлива для произвольных частот колебаний.

Рассмотрим самофокусировку, связанную только с диамагнитным эффектом. Для необыкновенной электромагнитной ($N_{\perp} \cong 1$) волны это возможно либо в начальной стадии фокусировки, либо в случае достаточно короткого волнового импульса, когда нелинейное возмущение плотности плазмы не успевает распределиться по Больцману. Пусть τ — длительность действия электромагнитного поля волны вдоль данной силовой линии внешнего магнитного поля в течение диамагнитной самофокусировки. Будем предполагать, что

$$L_z/v_{T\parallel e} \ll \tau \ll L_z/v_{T\parallel i}; \quad \tau \ll L_z/c_s, \quad (4.37)$$

где L_z — характерный размер волнового пучка вдоль магнитного поля; $c_s = (T_{\parallel e}/m_i)^{1/2}$ — скорость ионного звука. Второе условие (4.37) означает сверхзвуковой режим. Отметим, что сама фокусировка электромагнитной волны с частотой $\omega \sim k_{\perp}c$ происходит за время $\tau_f \sim L_f/c$, где L_f — длина фокусировки.

Найдем нелинейное изменение плотности. Будем считать, что высокочастотные колебания являются электронными. Вычисляя нелинейное изменение плотности δn с учетом квазистатического нелинейного потенциала, получаем при условиях (4.37) и при $\omega_{Bi}\tau \gtrsim 1$ следующие уравнения:

$$\partial_t^2 \delta n = \frac{e^2 n_0}{4m_e m_i} \partial_z^2 \sum_{n > 0} \frac{n^2}{n!} \langle \chi_+^{(n)} \psi_+^{(n)*} + \chi_+^{(n)*} \psi_+^{(n)} \rangle \quad (4.38)$$

при $\omega_{Bi}\tau > L_z/L_{\perp}$;

$$\delta n = \frac{e^2 n_0}{4m_e m_i \omega_{Bi}^2} \nabla_{\perp}^2 \sum_{n > 0} \frac{n^2}{n!} \langle \chi_+^{(n)} \psi_+^{(n)*} + \chi_+^{(n)*} \psi_+^{(n)} \rangle \quad (4.39)$$

при $\omega_{Bi}\tau < L_z/L_{\perp}$,

$$\text{где } \psi_+^{(n)} = r_{Be}^{n-1} (\partial_x + i\partial_y)^{n-1} \sum_{\omega} \frac{E \omega^{\dagger}}{\omega} \exp(-i\omega t).$$

В этих уравнениях $n_0 = n_{0j}$ — невозмущенная плотность; $\delta n = \delta n_i = \delta n_e$; L_{\perp} — характерный поперечный размер волнового пучка поперек магнитного поля. Изменение плотности δn при рассматриваемых условиях связано с установлением вдоль внешнего магнитного поля

больцмановского распределения электронов в поле квазистатического потенциала и в поле высокочастотного потенциала. Ионы в квазистатическом потенциале движутся вдоль линий магнитного поля в случае (4.38) и поперек в случае (4.39). При $N_{\perp} \sim 1$ основной вклад в (4.38) и (4.39) дает первая гармоника ($n = 1$), а в формуле (4.36) — первая и вторая гармоники ($n = 1, 2$), причем вторая гармоника дает больший вклад при условии $(\omega - 2\omega_{Be}^0)/\omega_{Be} < v_{T\perp e}/c$, где $v_{T\perp e}$ — поперечная тепловая скорость электронов.

Получим нелинейное волновое уравнение для необыкновенной электромагнитной волны, для которой $N_{\perp} \sim 1$. Подставим электрическое поле волны в виде

$$E = (1/2) E_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_{0x} x) + \text{к.с.}$$

Здесь k_{0x} и ω_0 — основные волновой вектор и частота пакета, связанные соотношением

$$k_{0x}^2 c^2 = \omega_0^2 - (\omega_{pe}^0)^2 + \frac{(\omega_{pe}^0 \omega_{Be}^0)^2}{(\omega_{pe}^0)^2 + (\omega_{Be}^0)^2 - \omega_0^2}.$$

Рассмотрим случай, когда частота волны близка ко второй гармонике электронной циклотронной частоты. Будем считать, что магнитное поле B_0 неоднородно в поперечном направлении, причем циклотронный резонанс в линейном приближении выполняется в точке $x = 0$. Таким образом,

$$2\omega_{Be}(x) = \omega_0(1 + x/L + h),$$

где учтено относительное нелинейное изменение магнитного поля h . Рассмотрим область, в которой

$$|x/L + h| > \max \left\{ \frac{v_{T\perp e}}{c}, \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \frac{v_{T\perp e} v_{T\parallel e}}{c^2} \right)^{2/3} \right\}. \quad (4.40)$$

В этом случае основной вклад в h дает первая гармоника ($n = 1$). Тогда, как показано в [4.27], нелинейным изменением плотности в волновом уравнении можно пренебречь при условиях:

$$\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} > \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{\tau c}{L_z}; \quad \omega_{Bi}^0 \tau > \frac{L_z}{L_{\perp}};$$

$$\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} > \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{c}{\omega_{Bi}^0 L_{\perp}}; \quad \omega_{Bi}^0 \tau < \frac{L_z}{L_{\perp}}.$$

При этом нелинейное уравнение для амплитуды $E_0^- \equiv E_{x0} - iE_{y0}$ примет вид:

$$2ik_{0x} \partial_x E_0^- + \partial_y^2 E_0^- + \mu_1 \partial_z^2 E_0^- = -(\mu_2/B_0^2) |E_0^-|^2 E_0^-; \quad (4.41)$$

$$\mu_1 = \frac{\omega_0^2 [\omega_0^2 - (\omega_{Be}^0)^2] - (\omega_{pe}^0)^4}{\omega_0^2 [\omega_0^2 - (\omega_{Be}^0)^2 - (\omega_{pe}^0)^2]};$$

$$\mu_2 = \frac{(\omega_{pe}^0)^4 [4(\omega_{Be}^0)^2 - (\omega_{Be}^0)^2]}{4[3(\omega_{Be}^0)^2 - (\omega_{pe}^0)^2]c^2}.$$

Оценка длины самофокусировки L_f из (4.41) при $\omega_{pe}^0 \simeq \omega_{Be}^0$ дает ($\mu_1, \mu_2 > 0$):

$$L_f \sim 10(B_0/E_0)L_{\perp}. \quad (4.42)$$

Отметим, что в [4.27] рассмотрен также случай, противоположный (4.40).

Из дисперсионного уравнения следует, что вблизи точки циклотронного резонанса необыкновенная электромагнитная волна может трансформироваться (в зависимости от направления распространения при заданных ω_{pe}^0 и ω_{Be}^0) в потенциальную бернштейнскую моду, для которой $N_{\perp} \gg 1$. В [4.27] рассмотрена диамагнитная самофокусировка потенциальной волны на второй гармонике электронной циклотронной частоты. Нелинейное изменение плотности найдено для случая $\tau > L_z/v_{T\parallel j}$, когда частицы сорта j успевают распределиться по Большому ману. Показано, что нелинейным изменением плотности в волновом уравнении для амплитуды потенциала можно пренебречь в области

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\omega_{pe}^0)^2}{4(\omega_{Be}^0)^2} \frac{v_{T\perp}^2 e}{c^2} < \frac{|x|}{L} < \frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \frac{v_{T\parallel} e}{c}, \text{ если } \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \right)^2 < 3; \\ \frac{v_{T\perp}^2 e}{c^2} < \frac{x}{L} < \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \right)^2 \frac{v_{T\parallel} e}{c}, \text{ если } \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \right)^2 > 3. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Левые неравенства (4.43) определяют область, в которой имеются потенциальные колебания ($x < 0$ при $(\omega_{pe}^0/\omega_{Be}^0)^2 < 3$ и $x > 0$ при $(\omega_{pe}^0/\omega_{Be}^0)^2 > 3$).

Оценка длины диамагнитной самофокусировки L_f при $\omega_{pe}^0 \sim \omega_{Be}^0$ дает:

$$L_f \sim L_z \left(\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right)^{1/2} \left(\frac{|x_f|}{L} \right)^{3/2} \frac{B_0}{E_0}, \quad (4.44)$$

где x_f — место начала фокусировки, причем считается, что $|x_f| > L_f$. Отметим, что длина самофокусировки (4.44) значительно меньше, чем (4.42).

Наряду с волнами, поляризованными поперек магнитного поля, в [4.27] рассмотрена диамагнитная самофокусировка обыкновенной волны, поляризованной вдоль линии магнитного поля при поперечном распространении. При $k_{\perp} \gg k_z$ имеем $E_z \gg E_{\perp}$, где $E_{\perp} \sim k_z E_z / k_{\perp}$. Предположим, что анизотропия температуры не слишком велика: $T_{\parallel j} / T_{\perp j} \gg \gg |\omega / (n\omega_{Bj}) - 1|$ ($n \neq 0$). При тех же условиях, что и для необыкновенной волны, получим нелинейное изменение магнитного поля для волны вблизи первой гармоники электронной циклотронной частоты:

$$\delta B = - \frac{(\omega_{pe}^0)^2}{B_0} \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \langle |\chi_z^{(1)}|^2 \rangle, \quad (4.45)$$

где в общем случае

$$\chi_z^{(n)} = P_{n,j} \sum_{\omega} \frac{E_z \omega}{\omega - n\omega_{Bj}} \exp(-i\omega t).$$

Формула (4.45) имеет место при условии

$$\frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \frac{\omega}{|\omega - \omega_{Be}|} k_{\perp} r_{Be} \gg 1,$$

когда вкладом нулевой гармоники ($n = 0$) можно пренебречь. Отметим, что в рассмотренном случае появление магнитной ямы (4.45) связано с действием магнитного поля волны.

Нелинейное изменение плотности δn определяется из уравнений ($\omega_{Bi}^0 \tau \gg 1$):

$$\partial_t^2 \delta n = \frac{e^2 n_0}{2m_e m_i (\omega_{Be}^0)^2} \partial_z^2 \langle |E_z|^2 \rangle, \quad \text{если } \omega_{Bi}^0 \tau > L_z / L_{\perp}; \quad (4.46)$$

$$\delta n = \frac{e^2 n_0}{2m_e m_i (\omega_{Be}^0 \omega_{Bi}^0)^2} \nabla_{\perp}^2 \langle |E_z|^2 \rangle, \quad \text{если } \omega_{Bi}^0 \tau < L_z / L_{\perp}. \quad (4.47)$$

Пусть внешнее магнитное поле зависит от координаты x , причем частота волны ω_0 совпадает в линейном приближении с электронной

циклотронной частотой в точке $x = 0$. Таким образом,

$$\omega_{Be}(x) = \omega_0(1 + x/L + h).$$

Положим

$$E_z = (1/2)E_{z0} \exp(-i\omega_0 t + ik_{0x}x) + \text{к.с.}$$

Тогда в области $|x|/L > |h|$ получим нелинейное волновое уравнение для амплитуды E_{z0} с учетом диамагнитного эффекта:

$$2ik_{0x} \partial_x E_{z0} + \partial_y^2 E_{z0} + \mu_3 \partial_z^2 E_{z0} = -(\mu_4/B_0^2) |E_{z0}|^2 E_{z0}, \quad (4.48)$$

где k_{0x} определяется из равенства: $k_{0x}^2 c^2 = \omega_0^2 - (\omega_{pe}^0)^2$. В (4.48) введены обозначения:

$$\mu_3 = \left[1 - \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \right)^2 \left(\frac{L}{x} \right)^3 \frac{v_{T\parallel e}^4}{c^4} \right] \frac{k_{0x}^2 c^2}{\omega_0^2};$$

$$\mu_4 = \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \right)^4 \frac{k_{0x}^4 v_{T\parallel e}^4}{16c^2 \omega_0^2} \left(\frac{L}{x} \right)^4.$$

В уравнении (4.48) нелинейное изменение плотности не учитывается. Это возможно при условиях:

$$\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \frac{k_{0x}^2 v_{T\parallel e}^2}{(\omega_{Be}^0)^2} \left(\frac{L}{x} \right)^2 > \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{\tau c}{L_z}, \quad \text{если } \omega_{Bi}^0 \tau > \frac{L_z}{L_\perp};$$

$$\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \frac{k_{0x}^2 v_{T\parallel e}^2}{(\omega_{Be}^0)^2} \left(\frac{L}{x} \right)^2 > \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{c}{\omega_{Bi}^0 L_\perp}, \quad \text{если } \omega_{Bi}^0 \tau < \frac{L_z}{L_\perp}.$$

Оценим длину самофокусировки L_f , связанную с неоднородностью амплитуды поля по оси y . При $\omega_{pe}^0 \approx \omega_{Be}^0$

$$L_f \sim 8L_\perp \left(\frac{x_f}{L} \right)^2 \frac{c^2}{v_{T\parallel e}^2} \frac{B_0}{|E_{z0}|},$$

где $|x_f| > L_f$.

Отметим, что если $\tau > L_z/v_{T\parallel j}$ (как для электронов, так и для ионов), то можно пренебречь δn в уравнении (4.48) в области

$$\frac{|x|}{L} < \left(\frac{\omega_{pe}^0}{\omega_{Be}^0} \right)^{1/2} \frac{k_{0x} c}{\omega_0} \left(\frac{v_{T\parallel e}}{c} \right)^{3/2}.$$

Таким образом, в этой области диамагнитный эффект оказывается более сильным, чем наибольшее возмущение плотности.

4.6. ЭФФЕКТЫ ЦИКЛОТРОННЫХ СОЛИТОНОВ

Потенциальные циклотронные волны могут раскачиваться в плазме по ряду причин, например пучками частиц вдоль магнитного поля, а также при наличии быстрых частиц поперек магнитного поля с риском потерь на функции распределения.

Обсудим кратко возможные кинетические эффекты в плазме, вызываемые появлением циклотронных солитонов, в случае, когда давление плазмы меньше давления постоянного магнитного поля. Поскольку ВЧ-давление в солитоне уравнивается магнитным давлением, а не давлением плазмы, то первое может приблизиться к давлению плазмы или даже превысить его. Выталкивание плазмы из солитона может задержаться из-за большой его длины вдоль магнитного поля, а также из-за продольной неоднородности магнитного поля (образования магнитных пробок). Способность циклотронных волн к самолокализации в виде солитонов дает возможность достижения большой плотности волновой энергии. Это, возможно, наблюдалось в экспериментах по ВЧ-нагреву плазмы в виде уширения спектральных линий излучения из плазмы [4.28]. Значительная плотность энергии колебаний электрического поля в солитоне может приводить к нагреву и аномальному сопротивлению. При этом энергия колебаний солитонного электрического поля посредством циклотронного резонанса переходит в поперечную кинетическую энергию захваченных электронов или ионов. Возможно, что такой механизм объясняет появление частиц с большой поперечной энергией, зарегистрированных в режимах с убегающими электронами [4.4].

Образованием циклотронных солитонов можно объяснить наблюдаемое в авроральной области резко неоднородное распределение циклотронных колебаний в пространстве [4.9]. Скачок в распределении настолько резкий, что создается впечатление наличия ударной волны с фронтом вдоль B_0 . При этом относительная амплитуда колебаний плотности достигает 20%.

Электромагнитные циклотронные волны используются для нагрева плазмы в лабораторных установках [4.1—4.5]. Их широко применяют и для нагрева ионосферной плазмы [4.29].

Для коротких импульсов волн основным нелинейным эффектом является ВЧ-диамагнетизм. Если импульсы достаточно длительные,

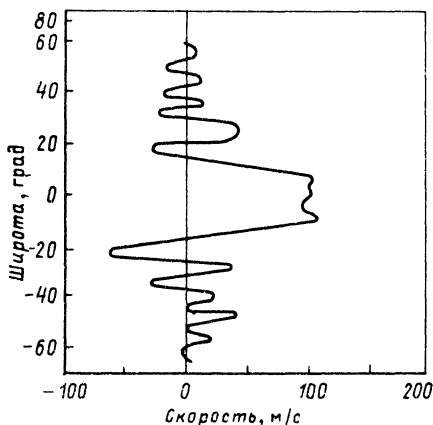
то нелинейность обычно вызывается квазинейтральным изменением плотности, когда она успевает распределиться по Больцману. Однако для бернштейновской моды ($N_{\perp} \gg 1$) и обыкновенной волны, бегущей поперек магнитного поля, возможен случай, когда диамагнетизм является основным нелинейным эффектом и при больцмановском распределении плотности. Длина самофокусировки бернштейновской моды оказывается значительно меньше длин самофокусировки электромагнитных волн с показателем преломления порядка единицы. Поэтому необыкновенная волна, бегущая поперек магнитного поля, может фокусироваться и поглощаться плазмой посредством трансформации в бернштейновскую моду.

Глава 5

УЕДИНЕННЫЕ ВИХРИ В АТМОСФЕРАХ БЫСТРОВРАЩАЮЩИХСЯ ПЛАНЕТ

5.1. СТРУКТУРЫ В АТМОСФЕРАХ И ОКЕАНАХ

В атмосферах планет из-за неравномерного нагрева возникают ветры разных структур. Основную роль в формировании погоды играют крупномасштабные ветры. Замечено, что в быстровращающихся планетах они направлены в основном вдоль широт (в зональном направлении). Примером таких ветров являются пассаты и муссоны в тропических и субтропических широтах. Особенно хорошо прослеживаются зональные течения в атмосфере Юпитера, где от экватора до полюса они несколько раз меняют свое направление (рис. 5.1) [5.1, 5.2]. В океанах наличие континентов препятствует зональному распространению течений. Неровности поверхности Земли также отклоняют течения



Р и с. 5.1. Распределение скоростей зональных течений по широтам Юпитера (большая скорость в экваториальной области возможно обусловлена дифференциальным вращением планеты)

от зонального направления. Из-за вращения планеты на движущиеся массы действует сила Кориолиса, которая могла бы закрутить их против вращения планеты (в антициклоническом направлении). Однако детальное рассмотрение показывает, что вращение стабилизирует зональные течения даже тогда, когда они неоднородны. На фоне зональных потоков наблюдаются крупномасштабные (синоптические) вихри — циклотроны или антициклоны. Циклоны представляют собой вихри, направление вращения в которых совпадает с направлением вращения планеты, а в антициклонах воздух циркулирует в противоположном направлении. Крупные вихри дрейфуют со скоростью меньше или порядка скорости вращения в вихре. Чаще всего дрейф направлен против вращения планеты. Завихренность в них меньше угловой скорости вращения планеты ω_0 . Однако в субтропических зонах иногда возникают тропические циклоны, в которых завихренность приближается к ω_0 . В особенно интенсивных вихрях, называемых торнадо, завихренность много больше ω_0 . Однако их характерный размер много меньше глубины атмосферы. В дальнейшем будем рассматривать только вихри, размер которых много больше глубины атмосферы, так что их можно описать в так называемом приближении мелкой атмосферы. В таких вихрях давление описывается в гидростатическом приближении, а вертикальная скорость много меньше горизонтальной.

5.2. УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В ряде случаев крупномасштабные течения в атмосфере хорошо описываются уравнениями мелкой воды. Они выводятся из трехмерных уравнений гидродинамики в предположении постоянства плотности и малой глубины по сравнению с горизонтальными размерами возмущений:

$$d_t \mathbf{v} = -\nabla p / \rho - g \mathbf{z}; \quad d_t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \nabla; \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

В мелкой жидкости согласно (5.2) вертикальный компонент скорости много меньше горизонтального. Поэтому в вертикальном компоненте (5.1) левой частью можно пренебречь:

$$\partial_z p = -g \rho; \quad p = -\rho g (z - H_1) + p_0, \quad (5.3)$$

где H_1 — отклонение глубины жидкости от равновесия; $p_0 = \text{const}$ — давление на поверхности жидкости, координата z отмеряется от невозмущенной поверхности. Тогда горизонтальный компонент (5.1) принимает вид:

$$d_t \mathbf{v}_\perp = -g \nabla_\perp H_1. \quad (5.4)$$

Мелкая вода в математическом смысле эквивалентна двумерному сжимаемому газу с плотностью $H = H_1 + H_0$, где H_0 – невозмущенная глубина жидкости, которая может зависеть от координат. Уравнение непрерывности такого газа имеет вид:

$$\partial_t H + \operatorname{div}(\mathbf{v}_\perp H) = 0, \quad H = H_1 + H_0. \quad (5.5)$$

В невозмущенной глубине $H_0(x, y)$ учитывается эффект неровности дна жидкости. Систему уравнений (5.4), (5.5) называют уравнениями мелкой воды.

При наличии вращения жидкости удобно перейти во вращающуюся систему координат. Это эквивалентно добавлению силы Кориолиса в уравнение движения (5.4)

$$d_t \mathbf{v}_\perp = -g \nabla_\perp H_1 + \Omega [\mathbf{v}_\perp, \xi], \quad (5.6)$$

где Ω – параметр Кориолиса. Уравнение (5.3) при этом остается без изменения, так как вертикальным компонентом силы Кориолиса можно пренебречь по сравнению с силой тяжести. Общеизвестно, что система (5.5), (5.6) хорошо описывает крупномасштабные возмущения атмосферы и океана. Однако, как будет видно из следующего параграфа, учет сжимаемости вносит существенный вклад в динамику атмосферы, так что уравнения мелкой атмосферы имеют несколько другой вид. Система (5.5), (5.6) имеет большое число первых интегралов. Из них, в частности, следует уравнение в замороженности обобщенной завихренности

$$d_t q = 0; \quad q = (\xi \operatorname{rot} \mathbf{v} + \Omega)/H. \quad (5.7)$$

Кроме того, сохраняются следующие интегралы:

$$E = (1/2) \int H(v^2 + gH) d^2 x; \quad (5.8)$$

$$M_\varphi = \int \{ [\mathbf{r}, \mathbf{v}_\perp]_\varphi + \Omega \} H d^2 x; \quad (5.9)$$

$$I = \int H \Phi(q) d^2 x, \quad (5.10)$$

где первые два интеграла представляют собой полную энергию и проекцию момента импульса вдоль меридиана. Компонент M вдоль широты не сохраняется из-за неоднородности Ω (зависимости его от широты). В (5.10) $\Phi(q)$ – произвольная функция, а интегрирование проводится по произвольной области D , точки которой движутся со скоростью \mathbf{v}_\perp (по жидкой области).

Приведенные уравнения инвариантны относительно формы поверхности. Они применимы для описания волн как на плоскости, так и на поверхности сферы.

5.3. УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ АТМОСФЕРЫ

Уравнения, описывающие волны на мелкой воде, исторически хорошо известны и изучены. Достаточно отметить, что уравнение КдФ произошло из этих уравнений. Крупномасштабные возмущения в атмосфере, казалось бы, должны описываться такими же уравнениями. Однако, как показано ниже, здесь имеются некоторые особенности. Обычно считается, что длинные волны в атмосфере описываются уравнениями мелкой воды (5.5), (5.6). При этом предполагается, что давление и температура меняются подобно друг другу. Однако, как видно из синоптических карт, это предположение выполняется не всегда. Приведем простой вывод уравнений мелкой атмосферы с учетом этого отличия [5.3]. Во вращающейся системе координат, связанной с планетой, уравнения атмосферы имеют вид:

$$d_t \mathbf{v} = -\nabla p/\rho - g\boldsymbol{\zeta} + \Omega[\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}]; \quad (5.11)$$

$$d_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (5.12)$$

$$d_t p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5.13)$$

где γ — показатель адиабаты. В уравнении для давления (5.13) для простоты пренебрегается эффектами нагрева и диссипативными процессами. Давление атмосферы на дне определяется в гидростатическом приближении из z -компонента (5.11)

$$p_b = g \int_0^{\infty} \rho dz, \quad (5.14)$$

где b соответствует значению величин на дне атмосферы ($z = 0$).

Уравнение непрерывности плотности атмосферы у поверхности планеты с учетом $v_{z0} = 0$ имеет вид:

$$\partial_t \rho_0 + \mathbf{v}_{\perp} \nabla \rho_b + \rho_b \operatorname{div} |_{z=0} \mathbf{v} = 0. \quad (5.15)$$

Далее, интегрируя (5.12) с учетом (5.14), получаем:

$$\partial_t p_b + \operatorname{div} (\mathbf{v}_{\perp} p_b) = 0. \quad (5.16)$$

Здесь предположено, что \mathbf{v}_{\perp} слабо зависит от z (приближение географичности).

Уравнение (5.13) на дне дает:

$$\partial_t p_b + \mathbf{v}_{\perp} \nabla p_b + \gamma p_b \operatorname{div} |_{z=0} \mathbf{v} = 0. \quad (5.17)$$

Сравнивая (5.17) с (5.16), определяем $\operatorname{div} \mathbf{v}$ у поверхности планеты

$$\operatorname{div} |_{z=0} \mathbf{v} = \gamma^{-1} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\perp}, \quad (5.18)$$

что после подстановки в (5.15) дает:

$$\partial_t \rho_b^\gamma + \operatorname{div}(\mathbf{v}_\perp \rho_b^\gamma) = 0. \quad (5.19)$$

Наконец, выпишем горизонтальный компонент уравнения движения (5.11) при $z = 0$:

$$\partial_t \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\perp \nabla \mathbf{v}_\perp = - \nabla p_b / \rho_b + \Omega [\mathbf{v}_\perp, \mathbf{z}]. \quad (5.20)$$

Уравнения (5.16), (5.19), (5.20) составляют полную систему мелкой атмосферы. Видно, что сжимаемостью атмосферы в длинных волнах нельзя пренебречь из-за конечности γ . Эта система переходит в уравнения мелкой воды (5.5), (5.6) при $\gamma \rightarrow \infty$ и $\rho_b = \text{const}$. При этом

$$H = \int_0^\infty \rho dz / \rho_b = p_b / (g \rho_b).$$

5.4. ГЕОСТРОФИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим ветвь низкочастотных колебаний, частоты которых много меньше Ω . При этом уравнения мелкой атмосферы можно упростить. Для этого воспользуемся так называемым геострофическим приближением, т.е. разложением по степеням ω/Ω , где ω — частота колебаний. В этом приближении из (5.11) имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_\perp &= \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_i + \dots; & \mathbf{v}_g &= (\rho \Omega)^{-1} [\mathbf{z}, \nabla p]; \\ \mathbf{v}_i &= \Omega^{-1} [\mathbf{z}, (\partial_t + \mathbf{v}_g \nabla) \mathbf{v}_g], \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

где индекс b здесь и в дальнейшем опускается.

Подставляя (5.21) в (5.16) и (5.19), получаем [5.3]:

$$\partial_t (p - r_R^2 \nabla^2 p) - \frac{r_R^4 \Omega}{\rho_0} \{p, \nabla^2 p\} + v_R \partial_x p - \frac{r_R^2 \Omega}{\rho_0} \{p, \rho\} = 0; \quad (5.22)$$

$$\partial_t \rho + \frac{(\gamma - 1) \Omega r_R^2}{\gamma \rho_0} \{p, \rho\} + (v_R / c_s^2) \partial_x p = 0, \quad (5.23)$$

где $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ — скорость звука в атмосфере.

В безразмерных единицах эти уравнения запишутся в виде

$$\partial_t (p - \nabla^2 p) + u_R \partial_x p - \{p, \nabla^2 p\} = \{p, \rho\}; \quad (5.24)$$

$$\partial_t \rho + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \{p, \rho\} + u_R \gamma^{-1} \partial_x p = 0. \quad (5.25)$$

Здесь время измеряется в единицах Ω^{-1} , координаты — в единицах радиуса Россби $r_R = (p_0/\rho_0)^{1/2}/\Omega$; u_R — безразмерная скорость Россби, $u_R = v_R/(p_0/\rho_0)^{1/2}$; давление и плотность измеряются в единицах p_0 и ρ_0 соответственно. В (5.24), (5.25) совершен приближенный переход к декартовой системе координат с осью x , направленной на восток, осью y — на север. При $\gamma \rightarrow \infty$ и $\rho = \text{const}$ эта система переходит в уравнение

$$\partial_t (p - \nabla^2 p) + u_R \partial_x p = \{p, \nabla^2 p\}, \quad (5.26)$$

предложенное Д. Чарни и А.М. Обуховым для описания волн Россби в атмосфере. Система (5.22) и (5.23), как и уравнение Чарни—Обухова (5.26), применима для возмущений размером меньше или порядка радиуса Россби. При больших масштабах, как показано в § 5.8, следует учесть отклонение коэффициентов от постоянных значений. В плазме ему соответствует уравнение для потенциальных дрейфовых волн, полученных Хасегавой и Мимой [5.4, 5.5].

В атмосфере плотность ρ связана с давлением и температурой T уравнением состояния идеального газа

$$p = \rho T, \quad (5.27)$$

где все величины обезразмерены.

Отсюда следует, что уравнение Чарни—Обухова применимо для случая, когда изотермы и изобары достаточно близки друг к другу. В противном случае для описания низкочастотных возмущений атмосферы лучше подходит система (5.24), (5.25).

5.5. ЗОНАЛЬНЫЕ ПОТОКИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Простейшим нетривиальным следствием уравнений мелкой атмосферы является решение в виде зонального потока (т.е. течения вдоль широты, вызванного неоднородностью давления вдоль меридиана). Это решение не зависит от времени и имеет вид $p = p(y)$, $\rho = \rho(y)$:

$$v_x = -(\rho \Omega)^{-1} \partial_y p; \quad v_y = 0. \quad (5.28)$$

Зональные потоки наблюдаются в атмосфере Юпитера (рис. 5.1) и в виде пассатов и муссонов в земной атмосфере. На Юпитере хорошо видно, что зональные потоки от экватора до полюса меняют направление несколько раз и имеют довольно большую неоднородность. В отсутствие силы Кориолиса такая неоднородность не могла бы существовать

из-за неустойчивости. Поэтому исследование устойчивости зональных потоков представляет большой интерес.

Основу теории устойчивости зональных потоков составляет теория Рэлея. Рэлей исследовал устойчивость плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости. Возмущение этого течения в линейном приближении описывается уравнением Рэлея [5.6]

$$\psi'' - k^2 \psi - \frac{u''}{u - c} \psi = 0. \quad (5.29)$$

Здесь $u(y)$ — скорость невозмущенного течения, направленная вдоль x ; y — компонент возмущения скорости, выражается по формуле $v_y = ik\psi(y) \exp[ik(x - ct)]$. Для исследования устойчивости течения умножим (5.29) на ψ^* (* означает комплексное сопряжение) и проинтегрируем его по сечению потока с условием обращения в нуль на границах. Тогда из (5.29) получим

$$\int \{ |\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2 + u'' |\psi|^2 / (u - c) \} dy = 0. \quad (5.30)$$

В общем случае c является комплексной величиной. Тогда мнимая часть (5.30) дает

$$\text{Im} c \int (u'' |\psi|^2 / |u - c|^2) dy = 0. \quad (5.31)$$

При наличии неустойчивости $\text{Im} c \neq 0$ условие (5.31) может быть выполнено, если подынтегральное выражение меняет знак. Это возможно только тогда, когда профиль течения имеет точку перегиба, т.е. $u'' = 0$ хотя бы в одной точке. Можно утверждать, что если нет точек перегиба, то течение устойчиво (теорема Рэлея).

Устойчивость зональных потоков можно исследовать, линеаризуя уравнение мелкой атмосферы (5.16), (5.19), (5.20) или их упрощенного варианта системы (5.24), (5.25) в геострофическом приближении. Линеаризация и последующие преобразования приводят к уравнению для возмущений

$$p_1'' + \left[\frac{p_0' - p_0''' - \gamma p_0'}{c + p_0'} + \frac{(\gamma - 1) p_0' + u_R}{c + \sigma p_0'} - 1 - k^2 \right] p_1 = 0. \quad (5.32)$$

Здесь возмущения давления ищутся в виде $p_1(y) \exp[ik(x - ct)]$, $\sigma \equiv (\gamma - 1)/\gamma$. Скорость зонального потока равна $-p_0'$ (в безразмерных единицах).

В пределе $\gamma \rightarrow \infty$ это уравнение переходит в уравнение несжимаемой жидкости с неоднородным профилем плотности:

$$p_1'' - \left[\frac{q'}{(c + p_0')} + 1 + k^2 \right] p_1 = 0, \quad (5.33)$$

где $q = \nabla^2 p_0 - p_0 - \rho_0 + u_R y$ — так называемая обобщенная завихренность течения. По аналогии с теоремой Рэлея, действуя как при получении (5.31), получаем, что достаточным условием устойчивости несжимаемой вращающейся жидкости является неравенство

$$p'_0 - p''_0 + \rho'_0 - u_R \neq 0. \quad (5.34)$$

Другими словами, обобщенная завихренность устойчивого зонального потока не должна иметь экстремума. При стремлении радиуса Россби к бесконечности $\rho'_0 = 0$ из (5.34) следует теорема Рэлея. Обобщением теоремы Рэлея на случай вращения (конечного радиуса Россби) и $\rho'_0 = 0$ является теорема Го [5.6], которая также следует из уравнения (5.34). В более общем случае сжимаемой атмосферы с неоднородной плотностью из (5.32), как и при (5.31), можно получить достаточное условие устойчивости:

$$(p'_0 - p''_0 - \gamma \rho'_0)(u_R + (\gamma - 1)\rho'_0) > 0. \quad (5.35)$$

Доказательство неустойчивости связано с построением собственных функций дифференциального уравнения (5.32), что может привести к разным результатам в зависимости от конкретного случая. Примеры построения таких собственных функций в квазиклассическом приближении с учетом явления Стокса приведены в обзоре [5.7].

5.6. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛАРИЧЕВА—РЕЗНИКА И ВИХРЕВЫЕ ДОРОЖКИ

Уравнение Чарни—Обухова и уравнения мелкой атмосферы замечательны тем, что в отличие от уравнений типа КдФ содержат нелинейности в виде якобиана, которые обращаются в нуль в одномерном или осесимметричном случае. Нелинейность такого типа характерна для волн в гидротропных средах, таких как вращающаяся атмосфера, замагниченная плазма и др. Любопытно, что уравнение КдФ было сформулировано еще в прошлом веке, а его общие решения были получены с помощью ОЗР только в конце 60-х годов. Это удалось благодаря сведению УКдФ к системе линейных уравнений. Аналогичная история происходила и с уравнением Чарни—Обухова, предложенным в 1947 г. Только в 1976 г. было получено, что оно имеет солитонные решения. С этого времени оно стало все шире применяться в теории синоптических вихрей в метеорологии и океанологии. Так же как и в случае УКдФ, процедуру нахождения решений уравнения Чарни—Обухова удалось свести к линейной задаче, но, к сожалению, только в стационарном случае.

Простейшим бегущим решением уравнения Чарни—Обухова является плоская гармоническая волна:

$$p = A \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t); \quad \omega_{\mathbf{k}} = k_x u_R / (1 + k^2). \quad (5.36)$$

Однако такое решение неустойчиво и распадается на две волны, сумма частот которых равна $\omega_{\mathbf{k}}$, поскольку спектр волн Россби удовлетворяет распадным условиям. Это означает, что для любой волны с волновым вектором \mathbf{k} и частотой $\omega_{\mathbf{k}}$ найдется волна с волновым вектором \mathbf{q} и частотой $\omega_{\mathbf{q}}$, удовлетворяющими условиям фазового синхронизма $\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{k} + \mathbf{q}}$. Из этих трех волн волна с наибольшей частотой передает свою энергию волнам с меньшими частотами и поэтому затухает (распадается). Инкремент этого процесса можно найти из следующих соображений. Каждая из этих трех волн в отдельности стационарна, но вместе они начинают влиять друг на друга из-за нелинейного члена. Считаем, что амплитуда волны \mathbf{k} , у которой частота наибольшая, настолько велика, что ее можно считать постоянной. Тогда амплитуды волн \mathbf{q} и $\mathbf{q} + \mathbf{k}$ удовлетворяют уравнениям (оставлены только члены с одинаковыми частотами):

$$\partial_t a_{\mathbf{q}} = V_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{q} + \mathbf{k}}; \quad (5.37)$$

$$\partial_t a_{\mathbf{q} + \mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{q}}. \quad (5.38)$$

Отсюда

$$\partial_t^2 a_{\mathbf{q}} = |V_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 |a_{\mathbf{k}}|^2 a_{\mathbf{q}}. \quad (5.39)$$

Решение этого уравнения растет со временем с инкрементом $\gamma \sim \simeq |V_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}| |a_{\mathbf{k}}|$. Поскольку любые возмущения можно представить в виде суммы фурье-гармоник, отсюда следует такая картина нелинейной эволюции: каждая гармоника рождает две с меньшими частотами. Меньшим частотам соответствуют большие длины волн. Таким образом, возмущения (если нет компенсирующего источника) становятся все более низкочастотными и крупномасштабными. Как показали Хасагава и Мима [5.4], масштабы вдоль широты растут много быстрее, чем вдоль меридиана. В результате возмущения стремятся к зональному потоку. Однако это имеет место не всегда: как показали В.Д. Ларичев и Г.М. Резник (ЛР) [5.8], уравнение Чарни—Обухова имеет локализованные решения в виде двумерных солитонов. Найденные в [5.8] солитоны антисимметричны по долготе. Впоследствии в [5.9] были найдены и более общие решения, которые оказались устойчивыми [5.10, 5.11]. Отсюда следует, что произвольное начальное возмущение с течением времени расплывается не полностью, часть его перейдет в случайный набор солитонов. Взаимодействие солитонов типа ЛР изучено слабо и только численными методами. Но поскольку они локализованы экспоненциально, у них нет дальнего действия. В силу этого хаотический набор солитонов живет намного дольше, чем набор синусоидальных

волн. Поэтому следует ожидать, что турбулентность волн Россби имеет структурный характер и состоит из набора солитонов. Это частично подтверждается численными и лабораторными экспериментами. Приведем решение уравнения Чарни—Обухова в виде солитона. Ищем его в виде $p = p(\xi, y)$, где $\xi = x - ut$, u — скорость перемещения. Тогда уравнение (5.26) приведет к виду

$$\{q, p + uy\} = 0, \quad q = \nabla^2 p - p - u_R y, \quad (5.40)$$

где q — обобщенная завихренность, которая фигурировала и в теореме Го. Общим решением (5.40) является $q = f(p + uy)$, где f — произвольная функция. Следуя [5.8], введем полярные координаты $r^2 = y^2 + \xi^2$; $\text{tg } \theta = y/\xi$ и круг радиусом a . Неизвестно, имеется ли солитонное решение этого уравнения при произвольной функции f и может ли это решение быть полностью гладким. В.Д. Ларичев и Г.М. Резник предложили свести задачу нахождения решения (5.40) к кусочно-линейной — выбором f в виде линейной функции с разными коэффициентами внутри и вне круга $r = a$. Тогда уравнение (5.40) становится похожим на уравнение Шредингера с потенциалом в виде прямоугольной ямы. Физическое отличие заключается лишь в том, что здесь яму потенциала образует само возмущение. Отметим, что такая процедура использовалась еще Хиллом для построения трехмерных вихрей в обычной гидродинамике. Однако в отличие от решений ЛР в решениях Хилла возможен непрерывный переход к нелинейным функциям f . Другое отличие заключается в том, что вихри Хилла спадают степенным образом (из-за отсутствия дисперсии), а решения ЛР спадают экспоненциально. Определим f таким образом, чтобы уравнение (5.40) принимало вид:

$$\nabla^2 p = \kappa^2 p, \quad \kappa^2 = 1 - u_R/u, \quad r \geq a; \quad (5.41)$$

$$\nabla^2 p = -k^2 p - (k^2 + \kappa^2)uy + k^2(1 - g_0), \quad r \leq a, \quad (5.42)$$

где g_0 — произвольная константа.

Чтобы $f(p)$ была определенной функцией на границе $r = a$ и якобиан в (5.40) оставался конечным, необходимо положить $p + uy = p_0 = \text{const}$. Тогда имеем решение

$$p = p_0 F_0(r) + au F_1(r) \sin \theta. \quad (5.43)$$

Здесь F_0 и F_1 — функции только r и определены соотношениями

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= g_0 [J_0(kr)/J_0 - 1] + 1 \\ F_1 &= (\kappa/k)^2 J_1(kr)/J_1 - (\kappa^2 + k^2)r/(k^2 a) \end{aligned} \right\} r \leq a; \quad (5.44)$$

$$F_0 = K_0(\kappa r)/K_0, \quad F_1 = -K_1(\kappa r)/K_1, \quad r \geq a. \quad (5.45)$$

Здесь J_m , K_n — функция Бесселя и Макдональда. В местах, где они при-

водятся без аргументов, аргумент равен ka или ka соответственно. Из условия непрерывности ∇p на границе $r = a$ следуют дисперсионное уравнение

$$-kJ_1K_2 = \kappa K_1J_2, \quad (5.46)$$

определяющее k через κ и значение константы

$$g_0 = -J_0K_2/J_2K_0 > 1. \quad (5.47)$$

С учетом дисперсионного уравнения (5.46) в решении остаются три свободных параметра: u , a и p_0 . Если p_0 отлично от нуля, то завихренность $\nabla^2 p$ терпит на границе $r = a$ скачок, равный $(\kappa^2 + k^2 g_0)p_0$. В случае $p_0 = 0$ завихренность непрерывна, а решение антисимметрично по y [5.8]. Как видно из (5.43), солитон состоит из антисимметричной дипольной части, на которой, как на "носителе", располагается "ядро" — симметричная часть произвольной амплитуды. Амплитуда носителя определяется скоростью u и размером локализации солитона a . Ядро не может существовать без носителя. Отметим также, что скорость перемещения u может быть много больше u_R , так что солитоны ЛР возможны и в однородной среде, где $u_R = 0$ (например, в полярной области планеты). Ясно, что в этом случае скорость солитона может быть направлена произвольно. Самой интересной особенностью рассмотренных решений является наличие захваченных частиц, которые, вращаясь, перемещаются вместе с солитоном. В солитоне дипольного типа область захваченных частиц совпадает с областью сшивки. При наличии ядра достаточно большой амплитуды область захваченных частиц может стать шире. Область захваченных частиц в системе покоя солитона определяется уравнением $p + u y = 0$. Отметим, что смещение сепаратрисы, отделяющей область захваченных частиц от границы сшивки, делает солитон более устойчивым, несмотря на то что при этом на гра-

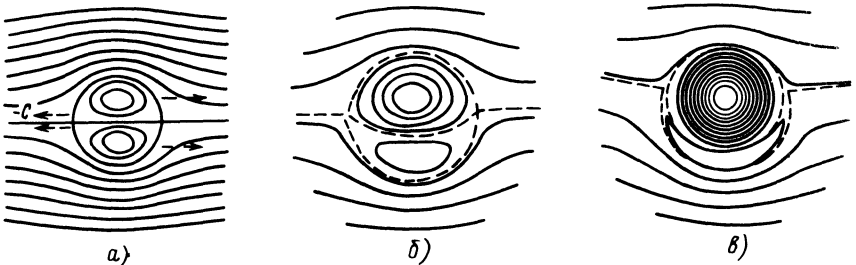


Рис. 5.2. Линии тока в системе покоя солитонного решения ЛР:

a — дипольное решение; b — решение с малой амплитудой "ядра" (область захваченных частиц близка к линии сшивки); c — решение с большой амплитудой ядра. Линия сшивки находится внутри области захваченных частиц

нице сшивки имеется скачок завихренности. На рис. 5.2 изображены линии тока в системе покоя солитона при различных амплитудах ядра. Наличие захваченных частиц придает солитону ЛР свойства вихря.

Уравнение Чарни—Обухова имеет решение и в виде вихревых дорожек в двумерной несжимаемой жидкости. Такие дорожки возникают в зональном потоке, скорость которого принимает разные постоянные значения при $y \rightarrow \pm \infty$. Для их получения заметим, что из (5.40) следует:

$$\nabla^2 p - p - u_R y = f(p + u y), \quad (5.48)$$

где $f(\mu)$ — произвольная функция.

Положим, что решение бежит со скоростью Россби $u = u_R$, а произвольную функцию выберем в виде

$$f(\mu) = -\mu + \left(4 \frac{k^2 A}{a^2} \right) \exp(-2\mu/A), \quad (5.49)$$

где A, k — постоянные, смысл которых определится из дальнейшего. Тогда (5.48) запишется в виде:

$$\nabla^2 (p + u_R y) = \frac{4k^2 A}{a^2} \exp\{-2(p + u_R y)/A\}. \quad (5.50)$$

Это уравнение имеет решение [5.12]:

$$p + u_R y = A \ln \frac{2}{a} [\operatorname{ch}(ky) + \sqrt{a^2 - 1} \cos(kx)], \quad (5.51)$$

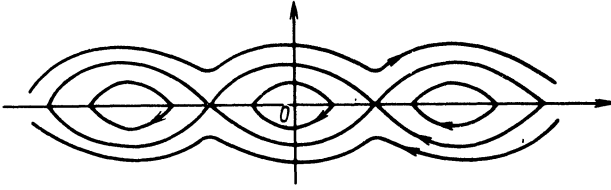
где a — параметр, характеризующий амплитуду вихревой дорожки; π/k — размер вихря. При $a = 1$ (5.51) переходит в решение в виде зонального потока:

$$p = -u_R y + A \ln 2 \operatorname{ch}(ky). \quad (5.52)$$

Нетрудно проверить, что он не удовлетворяет критерию Го, который следует из (5.34) при $\rho'_0 = 0$. При больших значениях аргумента (5.52) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} p &= (-u_R + kA)y, & y \rightarrow \infty; \\ p &= (-u_R - kA)y, & y \rightarrow -\infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Из (5.53) видно, что при $y > 0$ скорость зонального потока равна $u_R - kA$, а при $y < 0$ равна $u_R + kA$. При $a > 1$ в середине зонального потока образуется знакопеременная вихревая дорожка (рис. 5.3). Иногда такие решения называют "кошачьими глазами".



Р и с. 5.3. Решение уравнения Чарни—Обухова в виде зонального потока с вихревой дорожкой в системе покоя вихрей, бегущей со скоростью Россби

Покажем, что и уравнения мелкой атмосферы (5.24), (5.25) имеют решения типа солитонов ЛР и вихревой дорожки. Пусть давление и плотность зависят от широты так, что имеется зональный поток. Если характерный размер неоднородности много большего размера вихря, то приближенно можно положить

$$p \approx 1 + \beta_p y + p_1; \quad (5.54)$$

$$\rho \approx 1 + \beta_\rho y + \rho_1, \quad (5.55)$$

где p_1, ρ_1 — солитонная часть решения; β_p, β_ρ можно считать постоянными. Это соответствует наличию зонального потока с постоянной скоростью β_p (в безразмерном виде). Согласно критерию (5.35) распределения (5.54), (5.55) при $p_1 = \rho_1 = 0$ не всегда устойчивы. Ниже будет показано, что солитонные решения уравнений мелкой атмосферы существуют как в устойчивом, так и в неустойчивом случае. Однако возможно, что солитон в неустойчивых зональных потоках не реализуется. При этом более вероятным может быть образование вихревой дорожки. Пусть солитон бежит со скоростью так, что $\partial_t = -u \partial_x$. Тогда из (5.24), (5.25) после подстановки (5.54), (5.55) получаем:

$$\{p_1 + (\beta_p - u)y, \nabla^2 p_1 + (\beta_\rho + u - u_R)y\} = -\{p_1 + \beta_p y, \rho_1\}; \quad (5.56)$$

$$\{p_1 + uy/\sigma, \rho_1 + u_R y/(\gamma\sigma)\} = 0, \quad (5.57)$$

где $\sigma \equiv (\gamma - 1)/\gamma$.

Из (5.57) следует:

$$\rho_1 = f(p_1 + uy/\sigma) - u_R y/(\gamma\sigma), \quad (5.58)$$

где f — произвольная функция.

В простейшем случае можно f считать линейной функцией. Тогда из условия локальности ρ_1 и p_1 из (5.56) имеем:

$$\rho_1 = [u_R/(\gamma u)] p_1. \quad (5.59)$$

Подставляя (5.59) в (5.56), получаем уравнение в виде якобиана, которое приводится к виду:

$$\nabla^2 p_1 + [u - u_R + \beta_\rho + \beta_p \dot{u}_R / (\gamma u)] y = F [p_1 + (\beta_p - u) y]. \quad (5.60)$$

Выбором произвольной функции в (5.60) можно получить уравнение вида (5.41), (5.42), откуда следуют солитонные решения ЛР. Выбирая же произвольную функцию в форме (5.50), получаем решение в виде вихревой дорожки типа (5.51).

5.7. О ДИСПЕРСИОННОМ РАСПЛЫВАНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Возмущения в мелкой вращающейся воде аналогичны низкочастотным возмущениям в плазме, локализованным поперек магнитного поля. Если частота таких возмущений значительно меньше частоты Кориолиса или циклотронной частоты, то они могут распространяться в поперечном направлении только при наличии неоднородности или нелинейности. В решениях типа ЛР (5.44) скорость распространения в основном обусловлена нелинейными эффектами. Это следует из того, что такие решения могут существовать как в неоднородной, так и в однородной среде. То, что они локализованы экспоненциально, указывает на их сходство с солитонами. Однако нет прямой аналогии с солитонными решениями УКдФ и УКП. Качественное отличие состоит в том, что в первом случае амплитуда колебаний скорости δv больше скорости распространения u ($\alpha \equiv \delta v/u > 1$), а в последнем — много меньше ($\alpha \ll 1$). Но несмотря на то, что $\alpha > 1$, решения ЛР характеризуют малые возмущения, поскольку в них относительная амплитуда возмущения давления мала. Эта малость существенно использовалась при выводе уравнений (5.24)–(5.26) в геострофическом приближении. Чтобы иметь критерий для установления на эксперименте, является ли данное возмущение солитоном или нет, необходимо определить понятие длины дисперсии (экранировки) l_D и времени дисперсионного расплывания t_D в мелкой быстро вращающейся воде. Для этого перепишем уравнение Чарни–Обухова (5.26) в форме

$$\partial_t (\nabla_{\perp}^2 p - p/r_R^2) - (v_R/r_R^2) \partial_x p = \partial_t \varphi(x - ut, y), \quad (5.61)$$

где нелинейный член заменен внешней силой в виде заданной функции $\partial_t \varphi$, локализованной экспоненциально.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$p = (\nabla_{\perp}^2 - r_R^{-2} - v_R/u)^{-1} \varphi. \quad (5.62)$$

Отсюда видно, что размер экранировки бегущего локализованного возмущения

$$l_D = r_R (1 - v_R/u)^{-1/2}. \quad (5.63)$$

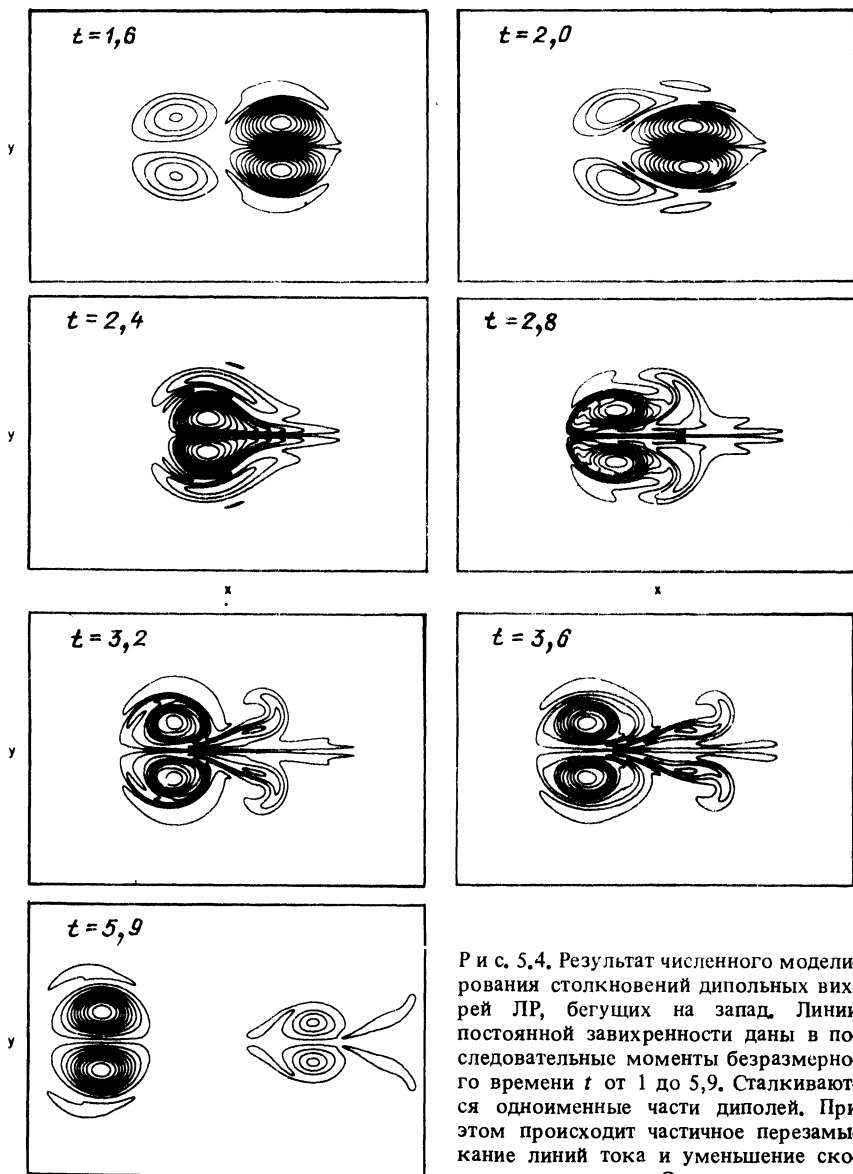
Если возмущение бежит со скоростью $v_R/u > 1$, то оно не экранируется. Время расплывания определим как время исчезновения следа от проходящего возмущения. Согласно (5.62) оно порядка длины следа, деленного на скорость возмущения, т.е.

$$t_D \simeq l_D/u \simeq r_R [(u - v_R)u]^{-1/2}. \quad (5.64)$$

В мелкой покоящейся воде, где $r_R \rightarrow \infty$, также могут распространяться стационарные вихри. Однако в отличие от солитонов ЛР они спадают степенным образом (скорость спадает как r^{-2}), т.е. не экранируются (длина экранировки стремится к бесконечности), что согласуется с полученными оценками l_D и t_D . Таким образом, если солитоны определить как бегущие возмущения, локализованные экспоненциально и не меняющиеся за время порядка t_D , то решения ЛР можно считать солитонами. Как отмечалось во Введении, признаком, отличающим солитоны от других типов возмущений, является отсутствие дальнего действия, что связано с их сильной локализацией. В случае атмосферы длина локализации l_D задается вращением планеты и скоростью перемещения возмущения [см. (5.63)]. Трудность прогнозирования поведения атмосферы помимо прочих факторов связана с тем, что из-за сильной локализации крупномасштабные быстро перемещающиеся возмущения слабо скоррелированы друг с другом

5.8. УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЧАРНИ–ОБУХОВА

Возникает вопрос: соответствуют ли решения ЛР наблюдаемым синоптическим вихрям? Для этого в первую очередь необходимо исследовать их устойчивость. Если солитоны устойчивы, то отсюда следует их однозначность. Другими словами, сделанный в (5.41), (5.42) выбор произвольной функции f , определяющей зависимость обобщенной завихренности от функции тока $p + \omega y$, однозначен, т.е. не существует другой функции f_1 , мало отличающейся от f , для которой также имелось бы бегущее солитонное решение. Отметим, что для вихрей в невращающейся жидкости устойчивость пока не доказана и там, по видимому, возможны стационарные решения с f , мало отличающимися друг от друга. Ранее уравнение Чарни–Обухова решалось на ЭВМ [5.9, 5.13, 5.14] (рис. 5.4). Однако в этих расчетах нельзя было учесть скачки завихренности, поскольку использовалась разностная схема



Р и с. 5,4. Результат численного моделирования столкновений дипольных вихрей ЛР, бегущих на запад. Линии постоянной завихренности даны в последовательные моменты безразмерного времени t от 1 до 5,9. Сталкиваются одноименные части диполей. При этом происходит частичное перезамыкание линий тока и уменьшение скорости солитонов. Отметим, что при

лобовом столкновении (когда один диполь бежит на запад, а другой на восток) взаимодействуют вихри разных знаков и перезамыкание не происходит

интегрирования. Так как уравнение Чарни—Обухова допускает решение с разрывом завихренности, для его адекватного моделирования на ЭВМ требуются более сложные методы, например, метод частиц. Поэтому существующие численные модели вихрей не могут служить надежным доказательством их устойчивости, хотя в них было показано, что при взаимодействии солитоны ЛР не разрушаются. Для исследования устойчивости солитонных решений уравнения Чарни—Обухова воспользуемся сохранением следующих интегралов движения, являющихся аналогами интегралов уравнений мелкой воды:

$$\left. \begin{aligned} E &= \int [(\nabla h)^2 + h^2] d^2 x; \\ N &= \int h d^2 x; \quad h = p; \\ X &= \int x h d^2 x; \\ Y &= \int h y d^2 x - u_R t N; \\ M &= \int [(x - u_R t)^2 + y^2] h d^2 x. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

Здесь интегрирование проводится по всему объему жидкости. Кроме того, сохраняется интеграл вмороженности по произвольной жидкой области

$$I_{f, D} = \int_D f(q) d^2 x, \quad (5.66)$$

где f — произвольная функция, а D — жидкая область, т.е. область, точки которой перемещаются со скоростью $[\mathfrak{f}, \nabla h]$. Для исследования устойчивости, следуя [5.10], воспользуемся теоремой Ляпунова (см. приложение П.2). Составим функционал Ляпунова из интегралов движения в виде:

$$L = I_{f, i} + I_{g, a} - E + uY + \lambda N, \quad (5.67)$$

где индексы i и a обозначают интегрирование по внутренней и внешней областям контура Γ , окружающего D . Внутри контура полагаем $f = 0,5q^2/(1+k^2) + f_0$. Вне контура $g = 0,5uq^2/u_R + bq$. Здесь f_0, k, u, b, λ — константы, определяемые в дальнейшем. По теореме Ляпунова, поскольку L является интегралом движения, устойчивыми могут быть решения, осуществляющие экстремум функционала L , т.е. удовлетворяющие уравнению $\delta L = 0$. Если при этом окажется, что $\delta^2 L > 0$, т.е. если они осуществляют строгий минимум L , то по Ляпунову решение устойчиво.

Условие экстремальности L дает уравнение Эйлера во внутренней области Γ :

$$q/(1+k^2) = -(h+uy) + \lambda. \quad (5.68)$$

Во внешней области уравнение Эйлера имеет вид:

$$\partial_q g \equiv qu/u_R + b = -(h + uy) + \lambda. \quad (5.69)$$

При варьировании должны учитываться вариации относительной глубины h и контура Γ . Вариация по контуру Γ приводит к условиям $q_i = \text{const}$ и $q_a = \text{const}$ на контуре. При этом эти константы, вообще говоря, различны, но удовлетворяют условию, что $f = g$ на контуре Γ . Уравнения Эйлера (5.68), (5.69) совпадают с уравнениями солитона (5.41), (5.42). Условие на контуре $f = g$ дает $(h + uy)_{\Gamma} = p_0 = \text{const}$

Из условия исчезновения решения на бесконечности во внешней области (5.69) получаем $b = \lambda$ и $\kappa^2 = 1 - u_R/u$. Солитонное решение Ларичева–Резника получается, если Γ есть окружность. Имеются ли решения при другой форме контура пока неизвестно. Известно только, что Γ не может быть эллипсом. Оценим вторую вариацию функционала L :

$$\begin{aligned} \delta^2 L = \frac{1}{2} \left\{ \int_i \frac{(\delta q)^2}{1 + \kappa^2} d^2 x + \frac{u}{u_R} \int_a \frac{(\delta q)^2}{a} d^2 x - \int [(\delta h)^2 + \right. \\ \left. + (\nabla \delta h)^2] d^2 x \right\} + \oint_{\Gamma} [\partial_q f - \partial_q g] n \delta q dl + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \partial_n [f - g - \\ - (h + uy) Q] n^2 dl + \oint_{\Gamma} K(l) (f - g) n^2 dl, \quad (5.70) \end{aligned}$$

где n — смещение по нормали между вариацией контура Γ и самим Γ , при этом из условия сохранения N следует $\oint n dl = 0$, $K(l)$ — кривизна по dl берется по контуру Γ . Контурный интеграл по dl берется по контуру Γ . Первый контурный интеграл в (5.70) равен нулю в силу (5.68) и (5.69). Третье и четвертое слагаемые заведомо положительны, если

$$\partial_n (f - g) > 0, \quad f - g > 0. \quad (5.71)$$

Для решения (5.43) это означает, что скачок завихренности должен быть достаточно большим:

$$|p_0/(au)| > [K_0/K_1 + 2/(\kappa a)] K_0/K_1. \quad (5.72)$$

Осталось оценить выражение в фигурных скобках (5.70). Из условия сохранения интегралов N , Y , X следуют условия на вариации:

$$\int \delta h d^2 x = \int x \delta h d^2 x = \int y \delta h d^2 x = 0 \quad (5.73)$$

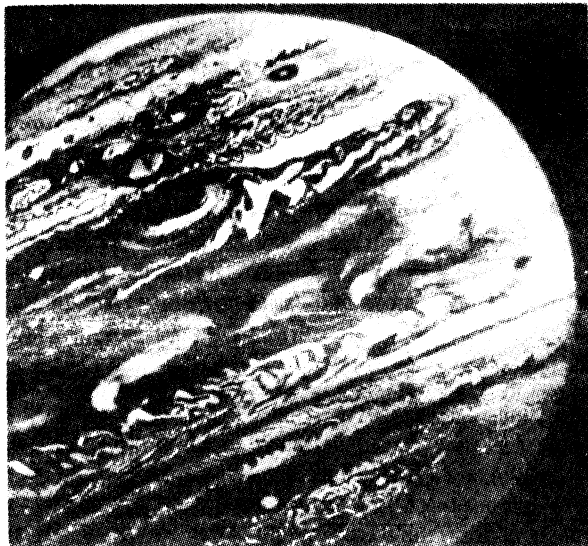
Уравнение Чарни–Обухова трансляционно инвариантно. Поэтому должны быть исключены возмущения, соответствующие простому переносу. Это означает, что δh должны быть ортогональны $\partial_x h$ и $\partial_y h$.

С учетом этих условий можно показать, что выражение в фигурных скобках (5.70) положительно.

Доказательство устойчивости солитонов ЛР спектральным методом проводилось в работе [5.11]. В ней было доказано, что собственные частоты возмущений солитона действительны и отличаются от нуля, если эти возмущения не тривиальны, т.е. не совпадают с бесконечно малым сдвигом. Однако, в [5.11] не учитывалась вариация контура. Поэтому в [5.11] все решения ЛР получились устойчивыми. Как отмечается в Приложении П2, спектральный метод не может дать достаточного условия устойчивости. Тем не менее, отличие собственных частот от нуля не указывает на однозначность солитонных решений.

5.9. АНТИЦИКЛОНЫ В ЗОНАЛЬНОМ ПОТОКЕ

В атмосферах планет часто наблюдаются вихри, размер которых больше радиуса Россби. Если они много меньше размера неоднородности (радиуса планет), то при описании таких вихрей можно пользоваться геострофическим приближением. При этом в отличие от вихрей ЛР нелинейность в виде якобиана становится малой как отношение размера Россби к размеру вихря. В этих условиях становится существенной другая нелинейность — нелинейность типа КДФ. Она появляется при учете зависимости коэффициентов квазигеострофических уравнений от амплитуды возмущений [1.16]. При малой амплитуде скорость перемещения такого вихря близка к скорости Россби. Ввиду этого линейные члены взаимно сокращаются и даже малая нелинейность становится существенной. В таких условиях возможны вихри-антициклоны (вращающиеся в сторону против вращения планеты). Вихри такого типа хорошо видны на фотографиях атмосферы Юпитера [5.1, 5.2] (рис. 5.5). Среди них особое место занимает Большое Красное Пятно (БКП), обнаруженное еще в 1664 г. Робертом Гуком. Это пятно расположено в южном полушарии на широте 22° . Подробные снимки этого феномена были получены в 1979 г. с борта космических аппаратов Вояджер 1,2. Пятно находится в зональном потоке с параметрами, близкими к порогу устойчивости, определяемому критериями (5.34), (5.35). Поскольку завихренность потока близка к завихренности БКП, то очевидно, что последнее подкручивается зональным потоком. Со времени открытия БКП оно исчезало и появлялось 17 раз. Цвет пятна также менялся многократно. Относительное возмущение давления в пятне оценивается в 4–10%. Ядро вихря имеет вид эллипса с размерами 22×11 тыс. км. Отметим, что радиус Юпитера составляет 70 тыс. км, период вращения 10 ч. Экваториальная область обращается на 5 мин быстрее полярной. Пятно вращается в антициклоническом направлении с периодом порядка 15 юпитерианских суток и дрейфует в широтном направлении, отставая от вращения плане-



Р и с. 5.5. Зональные потоки и БКП в атмосфере Юпитера. Снимок получен с космического аппарата "Вояджер 1" [5.1]

ты. Скорость дрейфа пятна относительно полярной области составляет 4–5 м/с, а относительно экваториальной области – 120 м/с. Последнее значение близко к скорости Россби на широте БКП. В ранних моделях БКП представлялось как вулкан, поплавок или вихрь Тейлора, уходящий в глубину планеты. В последнее время БКП трактуется, как солитон волн Россби [5.15, 5.16]. В этих работах пятно описывалось уравнениями, в которых учитывался нелинейный член в виде якобиана, а нелинейность типа КдФ опускалась. Как показано ниже, этой нелинейностью пренебрегать нельзя, так как размер БКП гораздо больше радиуса Россби, который на широте 22° равен 4000 км. Учет нелинейности типа КдФ проводился в [1.16, 5.17, 5.18]. При этом существенным оказался учет влияния зонального потока, который компенсирует эффекты невязкого затухания вихря, появляющегося из-за неоднородности среды. В стационарном случае оказалось, что параметры зонального потока однозначно определяют форму вихря [5.17]. Критерий устойчивости зональных потоков (5.34) показывает, что неоднородные зональные потоки с завихренностью антициклонического типа теряют устойчивость при меньшей завихренности, чем потоки циклонического типа. Поэтому уединенные вихри, поддерживаемые зональными потоками, в большинстве случаев являются антициклонами. При этом поддерживающий зональный поток может быть и устойчивым. Исходим из уравнения в замороженности обобщенного вихря в мелкой воде (5.7), упростим его, используя малость

параметров ω/Ω , λ , $\text{rot } \mathbf{v}/\Omega$, где λ , ω – характерные размер и частота возмущений. Тогда в (5.7) достаточно подставить выражение скорости в геострофическом приближении. Ищем решение в географических координатах в виде стационарной волны, бегущей вдоль широты с угловой скоростью u/R , $H = H(\varphi - ut/R, \alpha)$, где φ – меридиональный угол, α – широтный. Тогда из (5.7) имеем:

$$\frac{u \sin(2\alpha)}{2v_0} \partial_\varphi q + \partial_\alpha q \partial_\varphi h - \partial_\alpha h \partial_\varphi q = 0, \quad (5.73)$$

где $v_0 = gH_0/(2\omega_0 R)$; $h \equiv (H - H_0)/H_0$; H_0 – глубина невозмущенной атмосферы, которую для простоты считаем постоянной; R – радиус планеты;

$$q \simeq [(v_0/s) \nabla^2 h + gs/(v_0 R)]/(1 + h); \quad s \equiv \sin \alpha. \quad (5.74)$$

Общее решение (5.73) имеет вид:

$$q = F \left(h - \frac{u(s^2 - s_0^2)}{2v_0} \right), \quad s_0 = \text{const}, \quad (5.75)$$

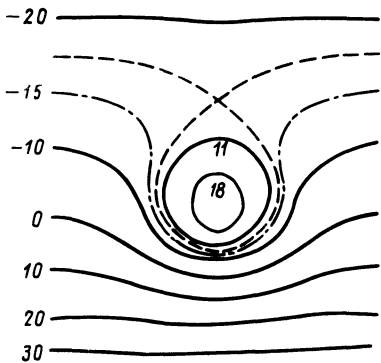
где F – произвольная функция. Будем считать, что решение (5.75) является суперпозицией зонального потока $h_z(\alpha)$ и солитона $h_s = h_s(\varphi - ut/R, \alpha)$, локализованного по всем направлениям. Достаточно рассмотреть (5.75) в области широт, где солитон заметно отличен от нуля. Внутри этой зоны вид зонального потока и F выбираются таким образом, чтобы (5.75) имело солитонное решение. Вне ее h_z и F можно считать произвольными, гладко переходящими в решение внутри зоны локализации солитона. В [1.16] это уравнение решалось в отсутствие зонального потока. При этом солитон получился не полностью локализованным по широте или же не совсем стационарным, испытывающим невязкое затухание. Это затухание может быть скомпенсировано подкруткой зональным потоком с соответствующей завихренностью [5.16, 5.17]. Считая ширину зоны и амплитуду солитона достаточно малыми, следуя [5.17], можно провести разложение в ряд, ограничиваясь квадратичными членами по амплитуде и ширине зоны:

$$F(x) = F_0 + F_1 x + (1/2) F_2 x^2, \quad (5.76)$$

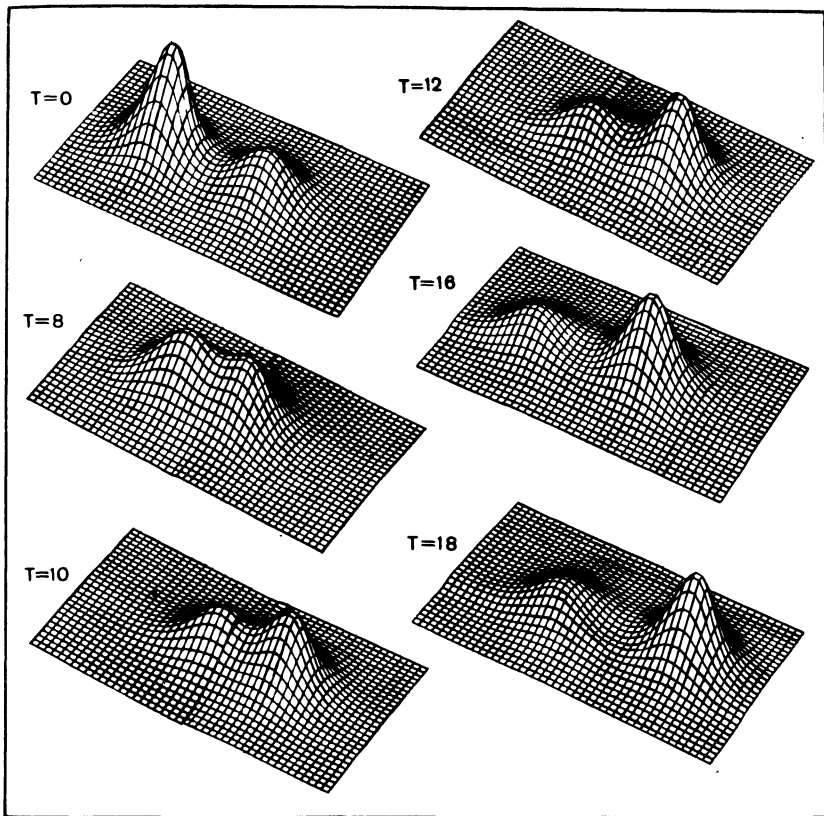
где F_i – константы, определяемые в дальнейшем: $x = h - us^2/(2v_0) + us_0^2/(2v_0)$; $s_0 = \sin \alpha_0$; α_0 – широта центра зоны.

Подставим (5.76) в (5.75) и представим $h = h_z + h_s$. Тогда вдали от солитона вдоль зоны получим уравнение, определяющее зональный поток:

$$q|_{h=h_z} = F \left(h_z - \frac{u(s^2 - s_0^2)}{2v_0} \right). \quad (5.77)$$



Р и с. 5.6. Решение уравнения (5.78) в виде антициклона в поддерживающем зональном потоке. Изображены линии тока в системе покоя вихря



Р и с. 5.7. Численное решение модельного уравнения антициклонов $\partial_t (h - \nabla^2 h) + \partial_x (h + h^2/2) = 5,2 \{h, \nabla^2 h\}$. Изображен процесс столкновения вихрей, бегущих "вдогонку" в последовательные моменты времени

С учетом (5.75)–(5.77) имеем уравнение солитона:

$$\nabla^2 h_s = \kappa^2 h_s - A h_s^2, \quad (5.78)$$

где κ^2 и A – коэффициенты, зависящие от a и от h_2 . Уравнение (5.78) имеет солитонное решение, удовлетворяющее исходным приближениям, если $0 < \kappa^2 \ll |A|$ (условие малости амплитуды солитона) и $\kappa^{-1} \ll R$ (условие малости его размера). При этом зависимость A от ширины можно пренебречь. Необходимо также выполнение дополнительного условия на зависимость κ^2 от ширины. Чтобы проиллюстрировать его, рассмотрим одномерное уравнение:

$$y'' = \beta(x)y - y^2. \quad (5.79)$$

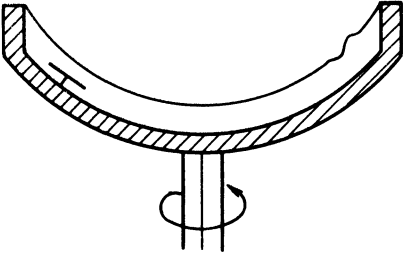
Предположим, что (5.79) имеет уединенное решение $y(x)$. Тогда, умножая его на y' и интегрируя по x , получаем:

$$\int \beta' y^2 dx = 0. \quad (5.80)$$

Ему можно удовлетворить, если β является четной функцией x . Аналогичному условию должно удовлетворять и κ^2 в (5.78). На рис. 5.6 приведен вид солитона в зональном потоке, полученный численным интегрированием (5.78). Устойчивость такого решения доказывается интегрированием соответствующего эволюционного уравнения. Детальный анализ показывает, что в реальных условиях существуют решения только в виде антициклонов ($h > 0, A > 0$) (рис. 5.7).

5.10. ЛАБОРАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОНОВ РОССБИ

Наблюдения волн на воде, несмотря на многовековую историю, и в настоящее время приводят к обнаружению новых явлений и способствуют пониманию сложных процессов в различных областях физики. Примером этому может служить получение солитонов Россби в лабораторных условиях. В [1.16] было предложено моделировать крупномасштабные вихревые структуры в атмосфере и плазме на мелкой воде во вращающемся сосуде с профилем дна близким к параболическому (рис. 5.8). При такой форме глубина жидкости поддерживается постоянной при соответствующей скорости вращения. Это простейшая модель вращающейся атмосферы, в которой полюс параболоида соответствует полюсу планеты. Имеется однозначное соответствие между широтами и долготами параболоида и планеты, а направление на восток соответствует направлению в сторону вращения параболоида. Сама атмосфера в эксперименте как бы вогнута. Эта модель даже более реалистичная, чем соответствующие теоретические построения, поскольку позволяет изучить целый ряд явлений, трудно поддающихся математическому описанию. Такой эксперимент из-за простоты



Р и с. 5.8. Схематическое изображение разреза сосуда для моделирования синоптических вихрей. При вращении с определенной скоростью жидкость в сосуде имеет постоянную глубину. Меняя скорость вращения, можно создавать градиент глубины, влияющий на скорость распространения вихрей. Вихри могут возбуждаться вращением диска, изображенного на левом краю. В правой части дан вертикальный разрез вихря ЛР. Глубина жидкости долж-

на быть меньше радиуса Россби. Однако ввиду того, что сила Кориолиса резко усиливает вязкое затухание, глубина должна быть не слишком малой

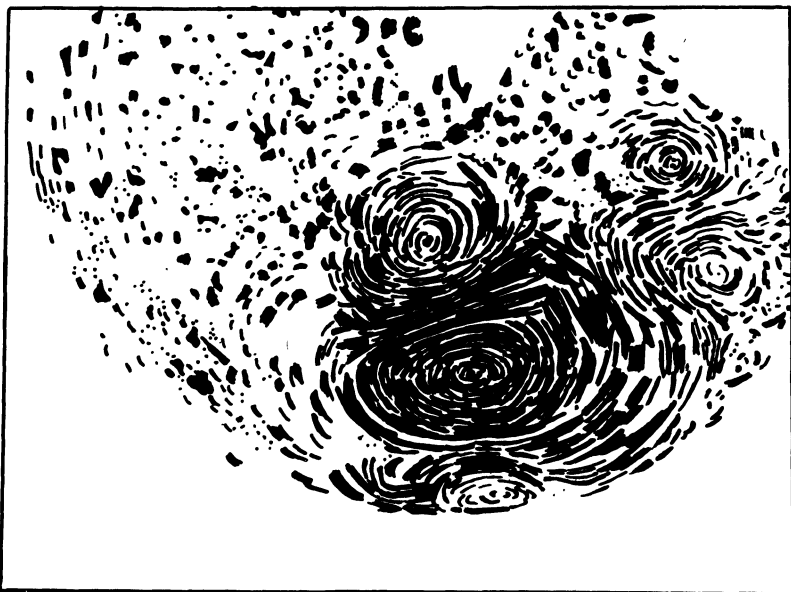
может служить наглядным пособием при преподавании соответствующих учебных курсов. Из-за сходства (изоморфизма) в математическом описании волн Россби и дрейфовых волн в плазме, выявленного Хасегавой и Мимой [5.4], опыты с мелким слоем вращающейся воды представляют несомненный интерес и для моделирования процессов конвективного переноса в плазме. В таких установках возможна имитация течений в атмосфере и океане, а также их взаимодействие с вихрями и солитонами.

При проведении этих экспериментов необходимо иметь в виду влияние эффектов вязкого затухания волн Россби. В атмосфере и океане их роль ничтожна из-за большой глубины. В лабораторных же установках необходимо принимать соответствующие меры, поскольку влияние придонной вязкости на двумерные течения во вращающейся жидкости намного сильнее, чем в покоящейся.

Первый параболический сосуд для этих целей был построен в 1981 г. в ИАЭ им. И.В. Курчатова [5.19]. Он был рассчитан на демонстрацию возможностей моделирования вихрей Россби. В связи с этим размеры установки были сравнительно небольшими. Максимальный диаметр сосуда составлял 28 см, радиус кривизны при вершине $R = 7$ см. Период вращения равнялся 0,6 с. Сосуд был предназначен для наблюдения вихрей на боковой стороне параболоида, где скорость Россби сравнительно велика из-за неоднородности силы Кориолиса. Возмущения в нем создавались с помощью вращающегося диска размером порядка радиуса Россби. В результате возникал вихрь, который отрывался от источника и начинал дрейфовать на запад со скоростью, близкой к скорости Россби (несколько меньшей). После создания вихря диск выключался. Эволюцию возмущения наблюдали с помощью фотоаппарата, вращающегося вместе с сосудом. Для выявления вихря на фоне покоящейся относительно сосуда жидкости на поверхности плавали маленькие кружки бумаги. Время экспозиции выбирали из расчета, чтобы по длине следов на фотопленке можно было определить скорость. Применяли и диагностику с помощью подкрашивания жидкости. В этих экспериментах

возникали только вихри антициклонического типа. Циклоны затухали очень быстро. Амплитуда долгоживущих вихрей была довольно большой, так что относительное возмущение глубины жидкости $h = (H - H_0)/H_0 \approx 0,5$. При этом невозмущенная глубина жидкости H_0 составляла 0,5 см, а радиус Россби $r_R \approx 1,5$ см. Радиус вихрей равнялся $1,3r_R$. Время жизни вихрей было довольно большим и составляло 30–50 периодов вращения сосуда. Позднее в таком сосуде были созданы зональные потоки с помощью специальных вращающихся на дне сосуда колец [5.20, 5.21]. Оказалось, что если завихренность в зональном потоке имела антициклоническое направление, то при переходе зонального потока в неустойчивый режим [см. (5.34)] в нем возникали цепочки вихрей-антициклонов, похожих на вихри в отсутствие зонального потока. При усилении неустойчивости (нарастании градиента скорости в зональном потоке) вихри становились все мощнее, размер их нарастал, а число уменьшалось и, наконец, достигалось состояние, когда в потоке оставался единственный мощный вихрь. Заметных циклонических вихрей создавать не удавалось даже при мощных циклонических зональных потоках.

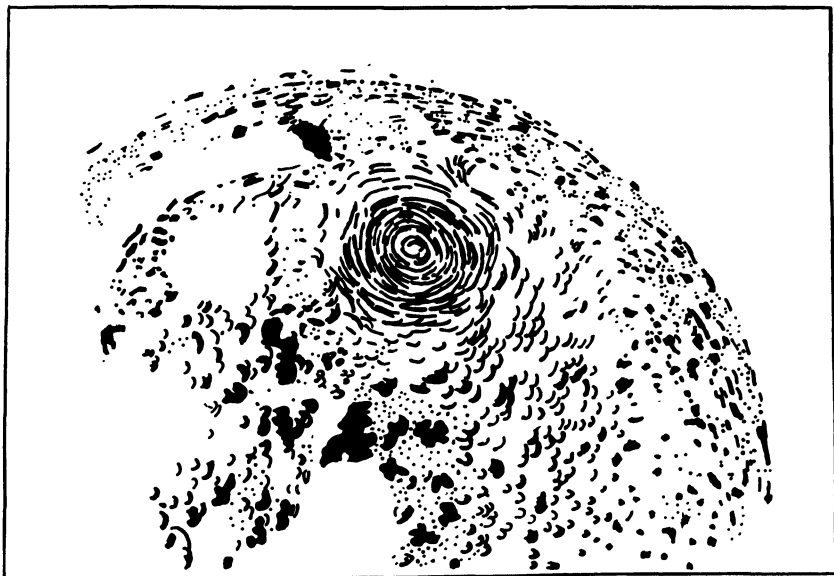
Малость глубины жидкости в этих экспериментах вызывала опасения, что придонное трение, возможно, сильно влияет на эти явления. Для уменьшения роли придонного трения в Абастуманской астрофизической обсерватории [5.22] была создана установка значительно больших размеров, в которой рабочая глубина воды могла меняться от 1,5 до 4,5 см. В отличие от экспериментов [5.19, 5.21] этот сосуд был пологим. Радиус кривизны составлял 93 см при максимальном диаметре 86 см. Период вращения был около 1,9 с. Меняя период вращения, можно было варьировать градиент невозмущенной глубины, что влияло на значение и направление скорости Россби. Генерация вихрей производилась так же, как и в опытах [5.19]. Указанные изменения параметров системы привели к качественно новым результатам. При глубине $H_0 = 4$ см удалось реализовать антисимметричную пару циклон–антициклон, предсказанную теоретически В.Д. Ларичевым и Г.М. Резником [5.8] (рис. 5.9). Часто возникал и уединенный циклон, который, вероятно, соответствует решению [5.9] с разрывом завихренности (рис. 5.10). Легко возбуждались и уединенные антициклоны (рис. 5.11). Вид генерируемых вихрей слабо коррелировал с направлением вращения возбуждающего диска. Циклоны и антициклоны распространялись вдоль широты со скоростью, иногда в несколько раз превышающей скорость Россби. Иногда они бежали против скорости Россби, что допускается теорией [5.8, 5.9]. Пара циклон–антициклон не всегда бежала вдоль широты. Часто были случаи, когда она проходила через полюс (где скорость Россби равна нулю) и доходила до противоположного края сосуда, почти не меняя скорости распространения. Время жизни вихрей было близко к экмановскому времени (времени затуха-



Р и с. 5.9. Дипольный вихрь на мелкой воде во вращающемся сосуде [5.22], бегущий на запад со скоростью, в 1,5 раза большей скорости Россби



Р и с. 5.10. Циклон на мелкой воде в параболическом сосуде



Р и с. 5.11. Антициклон на мелкой воде в параболическом сосуде

ния двумерных течений при наличии силы Кориолиса). Поясним смысл этого термина.

Известно, что сила Кориолиса ограничивает толщину придонного слоя l в ламинарных течениях. Такой слой называют экмановским [5.23]. Его толщина не зависит от параметров течения и равна

$$l = (\nu/\Omega)^{1/2}, \quad (5.81)$$

где ν — кинематическая вязкость (для воды $\nu \approx 0,01 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$); Ω — параметр Кориолиса. Образование экмановского слоя усиливает диссипацию энергии течения. Почти все затухание происходит в этом слое, в котором из-за малой толщины градиент скорости очень большой по сравнению с градиентом в отсутствие силы Кориолиса. Характерное время диссипации двумерного течения можно получить, умножая характерное время диссипации в слое l^2/ν на H_0/l — отношение глубины течения к толщине слоя:

$$t_E = \frac{l^2}{\nu} \cdot \frac{H_0}{l} = \frac{H_0}{(\nu\Omega)^{1/2}}. \quad (5.82)$$

Вопрос о времени затухания двумерных вихрей является более сложным. Здесь следует учесть два различных эффекта. Наличие потенциальной энергии, связанной с изменением глубины жидкости в вихре, уве-

личивает время жизни по сравнению с t_E , поскольку она не подвержена вязкому затуханию. С другой стороны истощение, вызванное радиальным потоком в придонном слое, приводит к уменьшению времени жизни вихря. Первый эффект связан с переходом кинетической энергии вихря в тепло, а второй — с потерей массы. Обсудим каждый из них отдельно.

Характерный декремент затухания вихря в пренебрежении придонным истощением можно оценить, исходя из уравнения Чарни—Обухова, в котором учтен эффект экмановского трения:

$$\partial_t (P - \nabla^2 P) + u_R \partial_x P - \{P, \nabla^2 P\} = t_E^{-1} \nabla^2 P. \quad (5.83)$$

Умножая это уравнение на P и интегрируя, получаем, что декремент затухания вихря

$$\gamma_1 \approx [t_E (1 + a^2/r_R^2)]^{-1}, \quad (5.84)$$

где a — характерный радиус вихря. Отсюда следует, что характерное время затухания вихря в этом случае больше экмановского. Это означает, что деформация свободной поверхности делает вихрь менее чувствительным к диссипации.

Наличие же радиального потока в придонном слое уменьшает время жизни вихря по сравнению с экмановским. Этот эффект можно оценить следующим образом. Из сравнения силы Кориолиса с силой вязкого трения следует, что в слое Экмана радиальная скорость вытекания жидкости из вихря порядка азимутальной $v_r \approx v_\varphi$. Излишек объема жидкости, собранной в антициклон, порядка

$$V \approx \pi a^2 \delta H \approx \pi a^3 \Omega v_\varphi / g, \quad (5.85)$$

где δH оценено из условия геострофического равновесия. Учитывая, что толщина придонного слоя определяется формулой (5.81), декремент затухания вихря, вызванный придонным потоком, по порядку равен

$$\gamma_2 \approx v_r 2\pi a l / V \approx (2/t_E)(r_R/a)^2. \quad (5.86)$$

Поэтому время жизни вихря с учетом обоих эффектов определится по формуле

$$t \approx t_E \frac{a^2 (1 + a^2/r_R^2)}{3a^2 + 2r_R^2}. \quad (5.87)$$

Отсюда следует, что время жизни вихря меньше или порядка экмановского, если размер его не слишком большой. Самое большое значение a/r_R наблюдалось в очень мелкой воде ([5.20], с. 22) и составляло $\lesssim 1,5$. При этом, согласно (5.87), $t \lesssim t_E$.

Из приведенных качественных оценок следует, что время жизни двумерных вихрей, как и двумерных течений, характеризуется временем Экмана. Заметим, что радиус наблюдаемых вихрей a близок к κr_R , поэтому экспериментальная проверка зависимости t от a — затруднительна. В [5.20] наблюдаемое время жизни вихрей t пропорционально H^2 , что не согласуется с выводами [5.24], согласно которому $t \sim H$. Коэффициент пропорциональности зависит как от режима, так и от вида вихрей.

В экспериментах [5.22, 5.24] было обнаружено неожиданное явление: с уменьшением глубины вопреки (5.82) время жизни антициклонов почти не уменьшалось. При $H_0 < 2$ см антициклоны большой амплитуды жили значительно больше t_E . Вихри же других типов затухали почти мгновенно. Большое время жизни по сравнению с (5.82) и относительно большая амплитуда при $H_0 < 2$ см позволяют заключить, что в этом режиме реализуются антициклоны с трехмерной структурой (в которых существенны вертикальные движения жидкости). Возможно, что антициклоны в первой серии экспериментов [5.19–5.21], где $H_0 = 0,5$ см и $h \geq 0,5$, также имели трехмерное строение, что хотя и отличается от атмосферных антициклонов, но представляет большой интерес, как новое явление, не укладывающееся пока в рамки существующих теоретических представлений.

В созданных вихрях отчетливо наблюдались захваченные частицы, вращающиеся и перемещающиеся вместе с вихрем. Не удалось создавать солитоны Россби без захваченных частиц. В связи с этим возникает предположение, что захваченные частицы стабилизируют вихри (может быть из-за топологической устойчивости замкнутых линий тока). Для наличия захваченных частиц необходимо, чтобы скорость вращения была больше скорости перемещения вихря. Поскольку последняя больше скорости Россби, то для создания слабых вихрей (с малой амплитудой h) выгодна область, где скорость Россби мала, а именно полярная область параболоида. Наоборот, там, где скорость Россби велика, для захвата частиц скорость вращения вихря должна быть также большой, что ведет к значительному возмущению глубины.

В упомянутых экспериментах был решен вопрос, являются ли наблюдаемые структуры солитонами. За солитоны примем структуры, в которых эффекты дисперсионного расплывания компенсируются нелинейной корреляцией гармоник. Тогда время жизни наблюдаемых структур (если они солитоны) должно быть много больше времени дисперсионного расплывания t_D (5.64). Надо учесть, что это время не полностью связано со скоростью Россби, которая может равняться и нулю (например, в полярной области). Как следует из § 1.5, скорость распространения пакетов линейных волн находится в диапазоне $v_R/u > 1$. Солитоны не должны резонировать с линейными волнами, что выполняется, поскольку для них $v_R/u < 1$, где u — скорость переме-

ния солитона. Другими словами, скорость солитона должна отличаться от скорости любой из линейных волн. Время жизни солитонов во всех экспериментах было много больше t_D (5.64). Однако в опытах с очень мелкой водой [5.19–5.21] скорость вихрей была меньше скорости Россби. Отсутствие излучения волн Россби, возможно, объясняется тем, что декремент вязкого затухания волн при малой глубине очень велик [см. (5.82)].

Отметим проблемы, не решенные пока еще в экспериментах. Из-за сравнительной малости глубины в них не полностью решен вопрос о вязком времени жизни антициклонов. Не выяснено, с чем связано отклонение распространения пар циклон – антициклон от широтного направления – с эффектами вязкости или с эффектами неустойчивости. Из-за сравнительно малого времени жизни слабо изучен процесс взаимодействия солитонов Россби друг с другом и с зональными потоками. Остается также открытым вопрос о генерации зональных потоков в режиме с большой глубиной. Ввиду малости глубины слоя в существующих установках попытки создать заметный градиент температуры пока были безуспешными. Создание таких градиентов необходимо для моделирования уравнений мелкой атмосферы, в которой изобары и изотермы не совпадают друг с другом. Тогда, как указывалось в § 5.6, возможны вихри новых типов. Можно ожидать и другие явления, не замеченные теоретическим анализом. Все это указывает на целесообразность построения сосуда больших размеров с большей глубиной слоя воды. Это позволит лучше имитировать природные условия. В заключение приведем несколько формул, учитывающих специфику параболического сосуда по сравнению с вращающейся планетой. Поверхность вращающейся жидкости совпадает с параболическим. В цилиндрической системе координат с осью z вдоль оси вращения и с вершиной в полюсе уравнение поверхности жидкости имеет вид:

$$z = r^2 / (2R), \quad (5.88)$$

где $R = g/\omega_0^2$ – радиус кривизны поверхности в полюсе; g – ускорение свободного падения; ω_0 – угловая скорость вращения.

Дно сосуда отстоит на расстояние H от этой поверхности. Если $H \ll R$, то вода считается мелкой и форма дна сосуда близка к параболической. Ширина a в параболическом определяется по формуле

$$\sin \alpha = (1 + r^2/R^2)^{-1/2}, \quad (5.89)$$

где r – расстояние от оси вращения до поверхности жидкости. Эффективная сила тяжести, действующая в этой системе, складывается из центробежного ускорения и ускорения силы тяжести и равна $g/\sin \alpha$. Но это, оказывается, не меняет выражения скорости Россби v_R . Как и в случае сферы, оно равно:

$$v_R = 0,5 H \omega_0 (1 + \kappa \sin \alpha) \cos \alpha, \quad (5.90)$$

где $\kappa = -d \ln H / (d \sin \alpha)$ учитывает возможную зависимость невозмущенной глубины H от широты. На полюсе параболоида, как и на сфере, $\nu_R = 0$. Отметим также некоторое отличие выражения для размера Россби от соответствующего выражения для сферы.

$$r_R^2 = gH / (\Omega \sin \alpha), \quad (5.91)$$

что связано с изменением эффективного ускорения свободного падения $g_{\text{эф}} = g / \sin \alpha$. Параметр Кориолиса, как и прежде, определяется соотношением $\Omega = 2\omega_0 \sin \alpha$.

5.11. ТРЕХМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ В МЕЛКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ

Выше были рассмотрены движения атмосферы, слабо зависящие от высоты. Ввиду неоднородности атмосферы в ней возможны и течения, локализованные по высоте. Если их горизонтальный размер много больше глубины, то вертикальная скорость и здесь будет малой. Поэтому вертикальный компонент уравнения движения по-прежнему сводится к условиям гидростатического равновесия $\partial_z p = -\rho g$.

В § 1.5 свойства возмущений, меняющихся с высотой, были изучены в линейном приближении. Выяснилось, что если амплитуда таких волн мала, то основной нелинейный эффект оказывается таким же, как и в двумерных вихрях. Учет конечности амплитуды колебаний в квадратическом приближении приводит к следующему модельному уравнению для обобщенного вихря [5.25]:

$$\partial_t q + \{ \psi, q \} = 0, \quad (5.92)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \nabla_{\perp}^2 \psi - \psi + (\Omega/N)^2 \partial_z^2 \psi + \beta y; \\ \psi &\equiv p_1 / (\rho_0 \Omega); \quad \beta \equiv \partial_y \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Здесь p_1 – возмущение давления; N – частота Брента–Вяйсяля, определенная в § 1.5; ρ_0 – невозмущенная плотность атмосферы; якобиан берется по-прежнему по горизонтальным координатам. Отметим, что в этом уравнении наряду с горизонтальным характерным размером r_R и частотой Кориолиса появляется характерный размер по высоте $H_0 = -(\partial_z \ln \rho_0)^{-1}$ (так называемая приведенная высота) и характерная частота N . Уравнение (5.92) применимо, если размер возмущения по вертикали меньше приведенной высоты. Как показал Л.А. Берестов [5.26], уравнение (5.92) имеет трехмерные солитонные решения. В нем возмущение давления симметрично по вертикальной координате z и

по долготе x , а по широте y антисимметрично. В этом решении, как и в дипольном решении ЛР, имеется два свободных параметра: горизонтальный размер возмущений R и скорость перемещения u , направленная на восток. В [5.26] было найдено и более общее решение, в котором на дипольном решении, как и на носителе, наложено стационарное сферически-симметричное возмущение (ядро) с произвольной амплитудой A_1 . Завихренность носителя непрерывна, а завихренность ядра терпит конечный разрыв аналогично двумерному решению [5.9]. Позднее в [5.27] было найдено еще одно решение в виде ядра, которое четно по всем направлениям, но не обладает сферической симметрией. Амплитуда этого компонента A_2 является дополнительным независимым параметром. Таким образом, в трехмерных синоптических вихрях ядро может состоять из двух независимых компонентов, так что полное решение имеет четыре независимых параметра; R, u, A_1 и A_2 .

Уравнение (5.92) имеет следующие первые интегралы:

$$\int f(q, z) d^3 r; \quad \int y q d^3 r; \quad \int \psi q d^3 r; \quad \int (x - \beta t) q d^3 r,$$

где f — произвольная функция. Наличие бесконечного множества интегралов свидетельствует о близости (5.92) к полностью интегрируемому уравнению. Поэтому можно ожидать, что стационарные решения этого уравнения устойчивы. Наличие ядра, несмотря на разрыв завихренности, делает решение более устойчивым, как это имеет место в случае двумерных решений уравнения Чарни—Обухова. В этих решениях вертикальный размер вихря меньше горизонтального размера вихря.

С учетом инерционных членов выражения для горизонтальной скорости имеет вид:

$$v_{\perp} = (1 - \beta y / \Omega) [\xi, \nabla \psi] - d_t \nabla_{\perp} \psi / \Omega. \quad (5.94)$$

Вертикальный компонент скорости равен:

$$v_z = \Omega^{-1} \int_{-\infty}^z (\beta \partial_x \psi + d_t \nabla_{\perp}^2 \psi) dz. \quad (5.95)$$

Ищем решение уравнения (5.92) в виде стационарного возмущения, бегущего вдоль параллели. Подставляя $\psi = \psi(x - ut, y, z)$ в (5.92), получаем:

$$\{\psi + uy, q\} = 0; \quad q = F(\psi + uy, z), \quad (5.96)$$

где F — произвольная функция; u — скорость распространения возмущения.

Перейдем к сферическим координатам r, θ, φ с изменением вертикального масштаба в Ω/N раз (N считаем постоянной):

$$\left. \begin{aligned} x - ut &= r \sin \theta \cos \varphi; \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= r \Omega \cos \theta / N. \end{aligned} \right\} \quad (5.97)$$

Введем сферу радиусом R и выберем F в виде

$$F = \begin{cases} -k^2 (\psi + uy) & \text{при } r < R; \\ \kappa^2 (\psi + uy) & \text{при } r > R, \quad \kappa^2 \equiv \beta/u. \end{cases} \quad (5.98)$$

Тогда решение (5.96) выразится аналитически. Внутри сферы при $r < R$ оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \varphi) &= [D_i J_{3/2}(kr) / \sqrt{kr} - (\beta/k^2 + u)r] \sin \theta \sin \varphi + \\ &+ A_1 J_{1/2}(kr) / \sqrt{kr} - P + A_2 [J_{5/2}(kr) / \sqrt{kr}] (3 \cos^2 \theta - 1), \end{aligned} \quad (5.99)$$

вне сферы при $r > R$ оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \varphi) &= [D_e K_{3/2}(\kappa r) / \sqrt{\kappa r}] \sin \theta \sin \varphi + \\ &+ B_1 K_{1/2}(\kappa r) / \sqrt{\kappa r} + B_2 [K_{5/2}(\kappa r) / \sqrt{\kappa r}] (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned} \quad (5.100)$$

Здесь J_k и K_k — функции Бесселя и Макдональда соответственно; D_e , D_p , A_p , B_p , k , R , p — постоянные, часть которых определяется из условия сшивки решения (5.99). Исходя из того, что якобиан в (5.96) берется по горизонтальным координатам, потребуем, чтобы $\psi + uy$ на границе сшивки была функцией только z . Все эти условия сводятся к равенствам:

$$\left. \begin{aligned} (\psi + uy)|_{r=R \pm 0} &= Q(\theta); \\ \nabla \psi|_{r=R+0} &= \nabla \psi|_{r=R-0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

где Q — функция, определяемая в дальнейшем.

Подставляя (5.99) в (5.101), получаем:

$$\left. \begin{aligned} D_i &= \beta (R/k)^{3/2} / J_{3/2}(kR); \\ D_e &= -\beta (R/\kappa)^{3/2} / (K_{3/2}(\kappa R)); \\ B_1 &= A_1 (k/\kappa) J_{3/2}(kR) / (K_{3/2}(\kappa R)); \\ B_2 &= A_2 (\kappa/k)^{1/2} J_{5/2}(kR) / (K_{5/2}(\kappa R)); \end{aligned} \right\} \quad (5.102)$$

$$P = 3A_1 R^{1/2} K_{3/2}(\kappa R) \left(\frac{\kappa^2 + k^2}{\kappa^2 k^2 R^2} \right);$$

$$kJ_{3/2}(\kappa R)/(J_{5/2}(\kappa R)) = -\kappa K_{3/2}(\kappa R)/(K_{5/2}(\kappa R)). \quad (5.103)$$

В этих соотношениях остаются неопределенными четыре параметра: скорость дрейфа u , горизонтальный размер вихря R и амплитуды ядра A_1, A_2 ; k связан с κ и R дисперсионным соотношением (5.103), первую, важнейшую ветвь которого можно аппроксимировать формулой

$$\kappa R = [4,5(\kappa R)^2 + 86]/[(\kappa R)^2 + 15]. \quad (5.104)$$

Другие ветви дисперсионного уравнения соответствуют решениям с большим числом узлов. Они, по-видимому, неустойчивы.

Из условия применимости уравнения (5.96) вертикальный размер возмущения много меньше приведенной высоты и $R \gg H_0$. Отсюда получаем следующие ограничения на параметры решений:

$$H_0 \kappa N / \Omega > 1; \quad u \ll \beta H_0^2 N^2 / \Omega^2; \quad (5.105)$$

$$R \Omega / N \ll H_0; \quad R \ll c_g / \Omega. \quad (5.106)$$

Первое условие означает, что скорость дрейфа много меньше баротропной скорости Россби, а второе — что размер вихря много меньше баротропного радиуса деформации (радиуса Россби).

Вернемся к (5.95). Учитывая, что в солитоне $\partial_t = -u \partial_x$, из (5.96) получаем, что для солитона

$$v_z = -(\Omega/N^2) \{ \psi + \beta y, \partial_z \psi \}. \quad (5.107)$$

Учтем, что ψ — четная функция z , тогда очевидно, что $\partial_z \psi$ — нечетная функция z , следовательно $v_z|_{z=0} = 0$, т.е. верхняя и нижняя половины солитона не перемещаются. Отсюда следует, что возможно распространение верхней половины вихря вдоль твердой границы среды, например поверхности Земли или океана.

5.12. ТЕПЛОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ УСИЛЕНИЯ ВИХРЕЙ В АТМОСФЕРЕ

Выше рассматривались процессы взаимодействия вихрей с зональными потоками. Было отмечено, что они могут усиливаться зональными потоками или ветрами. Однако в этом случае амплитуда вихрей не может заметно превысить интенсивность зонального потока. Например, скорость вращения в БКП близка к скорости зонального потока. Однако

в природе часто наблюдаются вихри, интенсивность которых намного выше окружающих течений. Ясно, что для поддержания таких структур необходимы другие источники энергии. В атмосфере Земли на малых высотах источником энергии может служить процесс конденсации водяного пара, сопровождающийся выделением тепла. Этот механизм может поддерживать и усиливать тропические циклоны (тайфуны). Поднимающийся в центре тайфуна поток воздуха, содержащий большое количество перенасыщенного пара, расширяясь вследствие падения давления, нагревается из-за конденсации. Ввиду уменьшения плотности, вызванного нагревом, возрастает подъемная сила, что в свою очередь усиливает приток насыщенных паров из окружающей среды. Другой механизм усиления имеет место в пылевых бурях (самумах). Вследствие хорошей прозрачности воздуха поверхность песчаных пустынь нагревается намного сильнее, чем воздух. Поэтому, если нагретый песок будет поднят слабым ветром, это вызовет нагрев воздуха и приведет к возникновению подъемной силы, как в тропических циклонах. Возникающее из-за подъемной силы движение воздуха усиливает засасывание нагретого песка, в результате чего слабый ветер может превратиться в пылевую бурю. Такие же процессы возможно вызывают пылевые бури на Марсе, где большая часть поверхности покрыта пылью. Следует подчеркнуть, что для эффективной работы таких механизмов необходима когерентная, устойчивая структура ветра. Случайные (турбулентные) движения не могут усиливаться такими механизмами. В когерентных структурах типа циклонов в естественных условиях атмосферы происходит процесс, обычно реализующийся в химических реакторах, простейшим примером которого служит горение в печи.

На высотах нижней термосферы (70–90 км) имеется другой источник энергии синоптических вихрей – атомарный кислород. Он накапливается в результате фотодиссоциации молекулярного кислорода под действием солнечного ультрафиолетового излучения. Рекомбинация атомарного кислорода происходит в результате тройного столкновения:



Здесь $O(^3P)$ – атомарный кислород в основном состоянии; O_2^* – молекулярный кислород в возбужденном состоянии; M – произвольная нейтральная частица, приобретающая в результате реакции дополнительную энергию $\delta E = 5$ эВ. Фотохимическое время жизни O приблизительно описывается формулой

$$\tau \approx 1 / (2kn_M n_O), \quad (5.109)$$

где $k \approx 5 \cdot 10^{-33} (300/T)^{1/2}$ – константа скорости реакции; T – температура термосферы, К; n_O – концентрация атомарного кислорода; n_M – суммарная концентрация нейтралов; τ измеряется в секундах, концентрация – в см^{-3} .

Поскольку изменение концентрации в вихре пропорционально ψ , то можно обобщить (5.92) с учетом диссипации из-за вязкости и подкачки энергии за счет реакции (5.108) следующим образом:

$$d_t q = \gamma \psi + \mu \nabla^2 \psi, \quad (5.110)$$

где $\gamma \cong \delta E / (\epsilon t \Omega)$; μ – безразмерная кинематическая вязкость (вообще говоря, турбулентной); ϵ – тепловая энергия частиц. Высотные профили плотности и температуры нейтральных частиц свидетельствуют о том, что для рассматриваемого диапазона высот первый член в правой части (5.110) больше второго. При этом ограничение роста солитона может быть связано с нелинейными эффектами. Выше 90 км время жизни атомов O определяется в основном процессами диффузии и переноса, т.е. выделение тепла за счет реакции (5.108) малосущественно. Ниже 70 км концентрация атомов O становится очень малой, что приводит к резкому уменьшению вероятности тройного столкновения с участием двух атомов O. Основным источником исчезновения O на таких высотах является реакция слипания O и O₂ в результате тройного столкновения с образованием озона и последующая реакция



Таким образом, аналогично тайфунам и пылевым бурям в нижней термосфере возможно существование мощных крупномасштабных вихрей, имеющих форму тонкой линзы. Их затухание компенсируется горением атомарного кислорода в условиях химического реактора [5.27].

Полученные решения могут перемещаться как на восток, так и на запад. В действительности под влиянием возмущений возможно движение солитонов и в других направлениях, в том числе вверх и вниз. При этом они будут затухать из-за выхода за пределы активной зоны. Так, на высоте 120 км время жизни солитона при его толщине около 5 км и наличии только классической вязкости составляет всего около 3 ч.

Для экспериментального обнаружения солитона необходимы координированные измерения скорости ветра на большой площади. Наиболее простым способом представляется выброс на высотах слоя D ионосферы облака паров металла с низким порогом фотоионизации, например барира. Тогда, поскольку на рассматриваемых высотах выполняется соотношение $\nu_{en} \gg \omega_{Be}$ (ν_{en} – частота соударений электронов и нейтралов, ω_{Be} – циклотронная частота электронов), металлические ионы будут увлекаться движением нейтралов и наблюдения за ними можно осуществлять стандартными оптическими методами.

Указанием на возможное существование таких "кислородных автосолитонов" могут служить наблюдения земной кислородной линии длиной 557,7 нм. Излучение на этой линии локализовано на высотах от 80 до 120 км (первый эмиссионный слой – ПЭС). В средних широтах максимум его интенсивности приходится на (97 ± 2) км. Считается, что оно соответствует переходу возбужденного состояния атомарного кислорода O(¹S) в O(¹D).

С появлением наблюдений с орбитальных станций удалось построить усредненное пространственно-временное распределение свечения на этой линии. Во время полетов орбитальной станции "Салют 6" проводилось визуальное наблюдение свечения ночного неба, в том числе и на высотах ПЭС [5.28]. Авторы этой работы во время первой экспедиции на станции "Салют 6" (10.12.1977 – 16.03.1978) неоднократно наблюдали расслоение ПЭС по высоте. Горизонтальный размер зоны расслоения был порядка 1000 км, вертикальный 1–2 км. Появление таких светящихся слоев можно объяснить наличием рассмотренных выше вихрей.

Основным источником возбуждения землей линии на высотах ПЭС является двухступенчатый механизм Барта–Хильдебранта, состоящий из реакций (5.108) и



с последующим излучением зеленой кислородной линии в реакции



($\lambda = 557,7$ нм). Интенсивность излучения линии при этом сильно зависит от концентрации атомарного кислорода n_{O}^a , где a – числовой коэффициент порядка 2–3. По-видимому, наличие вихря приводит к конвективному перемешиванию кислорода, что сдвигает слой максимума излучения вниз и обуславливает формирование светящихся полос.

В заключение этого параметра остановимся на возможных ионосферных проявлениях термосферных вихрей. Эти вихри можно использовать при интерпретации явления аномального увеличения ионизации на высотах от 75 до 90 км в зимний период (так называемая зимняя аномалия слоя D). Зоны повышенной ионизации регистрируются в виде облаков с характерными поперечными размерами 1000–2000 км. Основными причинами роста ионизации считаются уменьшение эффективного коэффициента рекомбинации из-за повышения температуры и увеличение концентрации NO за счет турбулентного переноса с больших высот. Оба условия естественным образом выполняются внутри рассмотренных выше термосферных вихрей. Другим следствием существования вихрей могут быть крупномасштабные зоны повышенной и пониженной концентрации плазмы на высоте максимума слоя F ионосферы. Появление таких зон связывается либо с изменением нейтрального состава под влиянием дополнительного перемешивания нейтралов, вносимого связанным с солитоном перемещением атмосферных составляющих по вертикали, либо с появлением дополнительной системы интенсивных горизонтальных движений.

ДВУМЕРНЫЕ ДРЕЙФОВЫЕ ВИХРИ В ПЛАЗМЕ

6.1. ДРЕЙФОВЫЕ ВОЛНЫ И КОНВЕКЦИЯ В ПЛАЗМЕ

Известно, что теплопроводность в жидкостях и газах носит в основном конвективный характер. Наглядным примером такого переноса является образование ячеек Бенара, в которых происходит стационарное вихревое движение жидкости. Аналогичные явления могут иметь место и в плазме, удерживаемой магнитным полем. Это подтверждается измерениями теплопроводности на экспериментальных установках [6.1, 6.2].

В первых проектах удержания плазмы считалось, что если магнитное поле достаточно сильное, то она может двигаться только вдоль силовых линий, т.е. является одномерной. При этом считалось, что плазму можно легко изолировать от стенок, так как согласно классическим представлениям коэффициент диффузии пропорционален B^{-2} . Казалось, что созданием достаточно сильных магнитных полей можно легко добиться требуемых условий для удержания плазмы ввиду быстрого уменьшения потерь с ростом B . Однако в конце 50-х годов было выяснено, что плазма может двигаться и поперек магнитного поля из-за спонтанной генерации разности потенциала φ между силовыми линиями магнитного поля. Это приводит к поперечному дрейфу плазмы в скрещенных полях со скоростью $v_E = c[B, \nabla \varphi] / B^2$ и конвективному переносу тепла и частиц.

Теория конвективного переноса в плазме началась с открытия дрейфовых волн и дрейфовых неустойчивостей. Первый шаг в этом направлении был сделан Ю.А. Церковниковым [6.3]. Им были найдены низкочастотные колебания плазмы, бегущие поперек магнитного поля со скоростью диамагнитного дрейфа. Электрическое поле в них было строго перпендикулярно магнитному. Эти результаты были обобщены Л.И. Рудаковым и Р.З. Сагдеевым [6.4] на случай волн с продольным электрическим полем, много меньшим поперечного. В дальнейшем этой проблеме был посвящен большой цикл работ (см., например, [1.7]). Было показано, что дрейфовые волны могут усиливаться под влиянием диссипации на столкновениях или на затухании Ландау [1.4, 1.5]. Оценки коэффициентов переноса [0.7], сделанные в приближении слабой турбулентности, основанной на гипотезе о случайности фаз взаимодействующих волн, приводили к аномально большой утечке плазмы с коэффициентом диффузии порядка боровской ($D \sim B^{-1}$). В связи с этим начались поиски механизмов, уменьшающих диффузию плазмы на дрейфовых волнах. В [6.5, 6.6] показано, что дрейфовая неустойчивость может подавляться широм удерживающего магнитного поля. Но последующие эксперименты на установках с большим все-таки обнаруживали следы аномально большой теплопроводности плазмы. Для преодоления возникших трудностей была развита нелинейная теория, не использую-

шая предположение о хаотичности фаз [0.13]. В рамках ее было обнаружено явление самопроизвольной локализации дрейфовых волн. Оказалось, что уже при малой амплитуде происходит качественное изменение: они самоорганизуются в набор уединенных вихрей. Подобно солитонам они могут существовать независимо друг от друга, взаимодействуя только при столкновениях. Из-за сравнительно малых размеров вихри не чувствительны к шире. Поэтому они могут приводить к аномально большим потерям тепла и в установках с большим широм. Но в отличие от процессов турбулентной диффузии плазмы на дрейфовых волнах потери, вызванные образованием вихрей, носят конвективный характер. Количественная теория такого переноса пока далека от своего завершения.

6.2. ВОЗМУЩЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И ДАВЛЕНИЯ ИОНОВ В ДРЕЙФОВЫХ ВОЛНАХ

В дрейфовых волнах осцилляции скорости электронов вдоль магнитного поля много больше ионных. Поэтому колебаниями ионов вдоль \mathbf{B} можно пренебречь. Поперек магнитного поля электроны движутся со скоростью электрического дрейфа $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E}, \mathbf{B}]/B^2$. При этом электрическое поле поперек \mathbf{B} можно считать потенциальным. Скорость ионов в этом направлении незначительно отличается от электронной, что связано с относительно большой массой ионов. Возмущение плотности и давления ионов описываются одними и теми же уравнениями для дрейфовых волн всех типов, в которых длина волны велика по сравнению с ларморовским радиусом ионов. Учитывая это, приведем вывод уравнений для плотности и давления ионов. Поскольку плазму считаем бесстолкновительной, то для корректного описания эффектов давления необходим кинетический подход. Исходим из уравнения Власова для ионов, в котором пренебрегается продольным электрическим полем и производными по z , считая их малыми более высокого порядка:

$$\partial_t f + \mathbf{v}_\perp \nabla f + (e/m_i) \mathbf{E}_\perp \partial_{\mathbf{v}_\perp} f = \omega_{Bi} \partial_\alpha f, \quad (6.1)$$

где f – функция распределения ионов; α – угол циклотронного вращения в пространстве скоростей: $v_x = v_\perp \cos \alpha$, $v_y = v_\perp \sin \alpha$. Поскольку коэффициенты в (6.1) являются периодическими функциями α с периодом 2π , то удобно искать его решение в виде ряда Фурье:

$$f = \sum_k f_k(v_\perp, v_z, \mathbf{r}, t) \exp(ik\alpha). \quad (6.2)$$

Подставляя это выражение в (6.1), получаем цепочку уравнений для разных гармоник. Для первой гармоники имеем:

$$\begin{aligned} i\omega_{Bi} f_1 &= \partial_t f_1 + \langle \mathbf{v}_\perp \nabla_\perp f_0 + (e/m_i) \mathbf{E}_\perp \partial_{\mathbf{v}_\perp} f_0 \rangle_1 + \\ &+ \langle \mathbf{v}_\perp \nabla_\perp f_2 \exp(2i\alpha) + (e/m_i) \mathbf{E}_\perp \partial_{\mathbf{v}_\perp} f_2 \exp(2i\alpha) \rangle_1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\langle \dots \rangle_k \equiv (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} da \exp(-ika) (\dots)$ – оператор, выделяющий амплитуду k -й гармоники.

Введем иерархию малых параметров задачи. Считаем $\epsilon^2 \simeq \omega_{Bi}^{-1} \partial_t \simeq (\nu_{\perp} \nabla_{\perp})^2 / \omega_{Bi}^2 \simeq (eE_{\perp} / (m_i \omega_{Bi} \nu_{Ti}))^2 \ll 1$. Проведем разложение по степеням малого параметра ϵ . Видно, что разложение k -й гармоники при $k > 0$ начинается с членами порядка ϵ^k так, что справедливо разложение в ряд по степеням $f_k = f_k^{(k)} + f_k^{(k+1)} + \dots$, где верхний индекс означает порядок по ϵ . Найдем f_1 с точностью до членов порядка ϵ^3 . В первом порядке по ϵ из (6.3) имеем:

$$f_1^{(1)} = -(2\omega_{Bi})^{-1} [\nu_{\perp} (\partial_y f_0 + i \partial_x f_0) + (e/m_i) (E_y + iE_x) \partial_{\nu_{\perp}} f_0]. \quad (6.4)$$

Далее необходимо вычислить f_2 с точностью до ϵ^2 . Для него имеем уравнение

$$2i\omega_{Bi} f_2^{(2)} = \langle \nu_{\perp} \nabla_{\perp} f_1^{(1)} \rangle \exp(ia) + (e/m_i) E_{\perp} \partial_{\nu_{\perp}} f_1^{(1)} \exp(ia). \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) и (6.4) в правую часть (6.3), получаем искомое выражение для $f_1^{(3)}$ (легко видеть, что $f_1^{(2)} = 0$).

Интегрируя (6.1) по пространству скоростей с учетом (6.2), находим:

$$\partial_t n + \text{div}(\int \nu_{\perp} f_1 \exp(ia) d\nu + \text{к.с.}) = 0, \quad (6.6)$$

где $n = \int f_0 d\nu$. Вводим также давление по формуле $p_i = (m_i/3) \int \nu^2 f_0 d\nu$. Тогда из (6.6) с учетом выражения (6.3) для f_1 с точностью до ϵ^3 имеем:

$$\partial_t n + \nu_E \nabla n + \text{div}(\partial_t + \nu_E \nabla) (en E_{\perp} - \nabla p_i) / (m_i \omega_{Bi}^2) = 0. \quad (6.7)$$

Для получения уравнения давления ионов достаточно ограничиться первым порядком по ϵ , поскольку давление входит всюду только в малых по ϵ членах.

Умножая (6.1) на $m_i \nu^2 / 3$, получаем:

$$\partial_t p_i + \frac{1}{3} \text{div}(\int \nu_{\perp} \nu^2 f_1 d\nu) - \frac{2}{3} \frac{e}{m_i} E_{\perp} \int \nu_{\perp} f_1 d\nu = 0. \quad (6.8)$$

Подставляя в (6.8) f_1 в первом приближении из (6.3), приведем его к виду:

$$(\partial_t + \nu_E \nabla) p_i \equiv d_t p_i = 0. \quad (6.9)$$

Таким образом, вклад ионов в дрейфовых волнах описывается уравнениями (6.7) и (6.9). Плотность числа электронов в дрейфовых волнах с большой точностью равна ионной. Поэтому для замыкания системы достаточно иметь уравнение, выражающее n через E , что получается из уравнения для электронов. Здесь уже дрейфовые волны начинают отличаться друг от друга. Главным признаком отличия служит отношение компонента скорости волн вдоль \mathbf{V} к альфвеновской скорости и тепло-

вой скорости электронов. Если эти отношения велики, то имеем желобковые волны, если малы – то потенциальные дрейфовые волны. Если же эта скорость близка к c_A , то имеем дрейфово-альфвеновские волны, в которых в отличие от остальных существенно возмущение магнитного поля. По образному выражению Б.Б. Кадамцева, при этом силовым линиям магнитного поля не хватает "жесткости" и они немного искривляются, что ослабляет электрическое поле вдоль V . Из-за колебаний магнитного поля электрическое поле становится непотенциальным (не выражается через потенциал электрического поля φ). Однако поперечный компонент электрического поля остается потенциальным и равным $E_{\perp} = -\nabla_{\perp}\varphi$.

Потенциальность E_{\perp} упрощает задачу и позволяет компактно записать уравнения (6.7) и (6.9). В целях удобства приведем эти уравнения к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные переменные:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{Bi}t \rightarrow t; \quad r_s^{-1} r_{\perp} \rightarrow r_{\perp}; \quad e\varphi/T_{e0} \rightarrow \Phi; \\ n/n_0 \rightarrow N + 1; \quad p_i/(n_0 T_{e0} \rightarrow P + T_{i0}/T_{e0}). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Потенциал и давление ионов нормируются на электронную температуру T_{e0} из соображений, которые будут ясны при рассмотрении уравнений электронов. Тогда (6.7) и (6.9) после простых преобразований запишутся в виде:

$$d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi = d_t N - \operatorname{div} \{ P, \nabla \Phi \}; \quad (6.11)$$

$$d_t P = 0. \quad (6.12)$$

Здесь при получении последнего члена в (6.11) использовалось уравнение (6.12). По аналогии с квазигеострофическими уравнениями введена субстациональная производная по времени $d_t \equiv \partial_t + v_E \nabla$. Учитывая выражение для скорости электрического дрейфа в безразмерных переменных, имеем: $v_E \nabla \equiv \{ \Phi \dots \}$, где скобки $\{ \dots, \dots \}$, как и прежде, означают якобиан. Например:

$$\{ \Phi, N \} \equiv \partial_x \Phi \partial_y N - \partial_y \Phi \partial_x N. \quad (6.13)$$

Эти уравнения интегрируются в частном случае стационарного волнового пакета, бегущего по y со скоростью u . Полагая $\partial_t = -u \partial_y$, а также $d_t P = \{ \Phi - ux, P \}$ и т.д., из (6.12) имеем:

$$P = f_p (\Phi - ux), \quad \Phi = \Phi(x, y - ut), \quad (6.14)$$

где f_p – произвольная функция.

Интегрирование (6.11) возможно, если f_p является линейной функцией:

$$f_p = b_p (\Phi - ux), \quad (6.15)$$

где b_p – постоянный коэффициент. Тогда (6.11) принимает вид:

$$\{\Phi - ux, \nabla_{\perp}^2 \Phi - N\} = -b_P \{\Phi - ux, \nabla_{\perp}^2 \Phi\}. \quad (6.16)$$

Отсюда легко получаем:

$$(1 + b_P) \nabla_{\perp}^2 \Phi = N + f_N (\Phi - ux), \quad (6.17)$$

где f_N — произвольная функция.

Таким образом, колебания давления ионов P в дрейфовых волнах [0.13] могут существенно повлиять на вид стационарных решений и в общем случае их не следует отождествлять с колебаниями плотности или пренебрегать ими. Это аналогично учету бароклинности в уравнениях мелкой атмосферы.

В другом предельном случае, когда размер возмущений много меньше ларморовского радиуса ионов, ионы в потенциале Φ распределены по Больцману. При этом нелинейностью на ионах можно пренебречь, а вся нелинейность создается электронами (см. § 6.8).

6.3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДРЕЙФОВЫЕ ВИХРИ

Как отмечалось в § 1.3, при увеличении угла между магнитным полем и направлением распространения медленной ионно-звуковой волны фазовая скорость уменьшается и может стать порядка дрейфовой. В этом случае колебания ионов становятся почти поперечными, а их плотность описывается уравнением (6.11). С приближением к дрейфовой скорости нарастает компонент фазовой скорости вдоль магнитного поля. Однако пока она мала по сравнению с альфвеновской скоростью, электрическое поле можно считать потенциальным. Если одновременно эта скорость меньше и тепловой скорости электронов, то электроны распределены по Больцману в потенциале φ :

$$n = n_0(x) \exp[e\varphi/T_e(x)], \quad (6.18)$$

где невозмущенная плотность плазмы и температуры электронов, вообще говоря, являются заданными функциями x в случае неоднородной плазмы. Система (6.11), (6.12) и (6.18) описывает нелинейные потенциальные дрейфовые волны. Рассмотрим ее стационарное решение. Оно имеет решение в виде уединенного вихря и вихревой дорожки. В безразмерном виде (6.18) принимает форму

$$N = N_0(x) \exp(\theta(x)), \quad (6.19)$$

где $N_0(x) = n_0(x)/n_0(0)$; $\theta(x) \equiv T_e(0)/T_e(x)$.

Как отмечалось выше, в стационарном случае система (6.11), (6.12) приводится к виду (6.17). В системе (6.18), (6.19) коэффициенты существенно зависят от x , как в случае волн Россби, когда размер возмущения был много больше r_R .

Положим, что отношение характерного размера возмущения a к характерному размеру неоднородности плотности κ_n^{-1} и температуры κ_T^{-1}

мало. Считаем, что возмущение локализовано в окрестности $x = 0$ и бежит вдоль y . Тогда в зоне локализации возмущения применимо разложение [5.17]

$$\left. \begin{aligned} N_0(x) &= 1 + \kappa_n x + \kappa'_n x^2/2; \\ \theta(x) &= 1 - \kappa_T x; \\ f_N(w) &= -1 + f_1 w + f_2 w^2/2. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Амплитуду Φ также считаем малой (порядка $\kappa_n a$). Поэтому можно положить

$$\exp(\theta\Phi) \simeq 1 + (1 + \kappa_T x)\Phi + \Phi^2/2. \quad (6.21)$$

Подставляя разложение (6.20), (6.21) в (6.17), (6.19) и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} (1 + b_P)\nabla_{\perp}^2\Phi &= (1 + f_1)\Phi + (\kappa_n - \kappa_T - f_2 u)x\Phi + \\ &+ (1 + f_2)\Phi^2/2 + (\kappa'_n - uf_1)x + (\kappa'_n + f_2 u^2/2)x^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из (6.22) видно, что для наличия солитонных решений необходимо выполнение условий:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_n - \kappa_T - f_2 u &= 0; \\ \kappa_n - uf_1 &= 0; \\ \kappa'_n + f_2 u^2/2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

В противном случае решение не будет локализовано по x . Необходимость первого условия (6.23) обсуждалась при получении антициклонических решений в § 5.6. С учетом (6.23) приходим к уравнению двумерного солитона [6.7]:

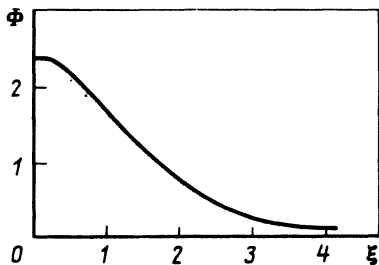
$$(1 + b_P)\nabla_{\perp}^2\Phi = \left(1 + \frac{\kappa_n}{u}\right)\Phi + \left(1 + \frac{\kappa_n - \kappa_T}{u}\right)\Phi/2. \quad (6.24)$$

Коэффициент b_P определяется из условия, что в невозмущенной области зоны давление ионов можно представить в виде $P = 1 + \kappa_P x$. Из (6.14) и (6.15) и условия, что вне зоны $\Phi \rightarrow 0$, получаем, что $b_P = -\kappa_P/u$. Кроме того, из условия малости Φ следует, что $1 + \kappa_n/u \ll \kappa_T/u$. Тогда окончательно получаем:

$$(1 + \tau_i)\nabla_{\perp}^2\Phi = (1 + \kappa_n/u)\Phi + \tau_e\Phi^2/2, \quad (6.25)$$

где $\tau_i \equiv \kappa_P/\kappa_n$; $\tau_e \equiv \kappa_T/\kappa_n$.

В (6.25) учитываются колебания давления ионов и появляется дополнительная нелинейность типа КдФ, связанная с градиентом невозмущенной температуры электронов. Эта нелинейность в дрейфовых волнах впервые найдена в [6.8]. Позднее в [6.9] было показано, что эта нелинейность в сочетании с дисперсионными поправками приводит к появ-



Р и с. 6.1. Решение уравнения (6.25) в виде потенциального дрейфового солитона антициклонического типа. Расстояние от центра солитона отсчитывается в единицах $[(1 + \tau_j)/(1 + \kappa_n/u)]^{1/2}$. Амплитуда солитона дается в единицах $2(1 + \kappa_n/u)/\tau_e$

лению одномерных солитонов, бегущих в направлении диамагнитного дрейфа. В [6.7] методом теории возмущений показано, что такие солитоны неустойчивы и уравнения потенциальных дрейфовых волн допускают двумерные солитонные решения антициклонического типа, распространяющиеся в направлении y со скоростями, превышающими дрейфовую скорость ($-\kappa_n/u < 1$). График решения уравнения (6.25) приведен на рис. 6.1. В отсутствие градиента температуры электронов ($\tau_e = 0$) и в пренебрежении давлением ионов ($\eta = 0$), аналогично переходу от уравнений мелкой атмосферы к уравнению Чарни—Обухова, уравнения (6.11), (6.12) приводятся к (5.26), которое было получено Хасагавой и Мимой [5.4]. Оно имеет решение в виде солитонов ЛР. Нетрудно подбором f_N из (6.17), (6.19) получить решения и в виде вихревой дорожки, действуя аналогично § 5.6.

В вышеприведенных решениях электрическое поле потенциально, а поле скоростей ионов вихревое. Завихренность скорости при этом пропорциональна $\nabla_{\perp}^2 \Phi$. Отметим, что из конечности завихренности не следует нарушения квазинейтральности колебаний. Это связано с тем, что нарушение квазинейтральности происходит на размерах порядка дебаевского радиуса r_D , в то время как конечность завихренности сказывается на размерах порядка $r_s \gg r_D$. В однородной плазме при $T_e = T_i$ размер потенциальных дрейфовых вихрей становится порядка r_{Bi} .

Дрейфовые потенциальные волны в линейном приближении усиливаются под влиянием дрейфово-диссипативной неустойчивости [1.4]. Эта неустойчивость вызвана тем, что фазовая скорость таких волн находится в интервале между скоростями ларморовского дрейфа электронов и ионов. Поэтому энергия дрейфового движения как бы передается волнам. Скорость рассмотренных выше солитонов находится вне этого интервала, так что они не подвержены этой неустойчивости. Они могли бы поддерживаться дрейфом плазмы в скрещенных полях, который аналогичен зональному потоку в атмосфере или градиентам температуры. Для этого необходимо, чтобы скорость дрейфа была неоднородна и имела "антициклонический" знак завихренности. В таком потоке двумерные дрейфовые солитоны могут подкручиваться аналогично антициклонам в атмосфере, рассмотренным в § 5.9.

6.4. УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА – ПОГУЦЕ И АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВИХРИ

Альфвеновские волны занимают особое место в гидродинамической теории устойчивости, так как в неоднородной плазме они раскачиваются легче других мод. Поэтому представляет интерес получение упрощенного уравнения, описывающего альфвеновские волны, отдельно. Ввиду малости скорости распространения поперек магнитного поля в них важную роль играют нелинейные эффекты. В одномерном случае они очень малы. Так, при продольном распространении нелинейность в альфвеновских волнах кубична по амплитуде. При распространении же почти поперек B_0 она квадратична по амплитуде, но содержит малый параметр ω/ω_{Bi} [6.10]. Б.Б. Кадомец и О.П. Погуце [0.11] показали, что при учете неоднородности в этом случае появляется сильный нелинейный член в виде якобиана подобно нелинейности в несжимаемой двумерной жидкости. Приведем вывод упрощенного уравнения нелинейных альфвеновских волн. Для этого исходим из уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики в пренебрежении эффектами давления. Используем малость следующих параметров: $\partial_z \ll \nabla_{\perp}$, $\partial_t \ll \omega_{Bi}$ и $B_z - B_0 \ll B_{\perp}$, где B_0 – невозмущенное магнитное поле, направленное вдоль z . Вследствие этих неравенств получается, что $v_z \ll v_{\perp}$. Тогда уравнение движения принимает вид:

$$\rho d_t v_{\perp} = (4\pi)^{-1} [\text{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]; \quad (6.26)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot} [v_{\perp}, \mathbf{B}]; \quad (6.27)$$

$$d_t \rho = 0; \quad d_t \equiv \partial_t + v_{\perp} \nabla_{\perp} \rho. \quad (6.28)$$

Введем функцию тока ψ по формуле

$$v_{\perp} = [\xi, \nabla \psi] \quad (6.29)$$

и вектор потенциала магнитного поля \mathbf{A} . Ввиду малости $B_z - B_0$ поперечным компонентом \mathbf{A} можно пренебречь. Тогда имеем:

$$\mathbf{B}_{\perp} = [\nabla A_z, \xi] \quad (6.30)$$

Введем иерархию малых параметров $\partial_z/\nabla_{\perp} \sim \partial_t/(c_A \nabla_{\perp}) \sim B_{\perp}/B_0 \sim \epsilon$. Беря rot от (6.26) с учетом (6.29) и (6.30), получаем:

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \psi + \{ \psi, \nabla_{\perp}^2 \psi \} = \{ A_z, \nabla_{\perp}^2 A_z \} - c_A \partial_z \nabla_{\perp}^2 A_z. \quad (6.31)$$

Колебаниями плотности в этом уравнении можно пренебречь как малыи более высокого порядка.

Подставляя (6.29) и (6.30) в (6.27), получаем уравнение, связывающее вектор-потенциал A_z с функцией тока ψ :

$$\partial_t A_z + c_A \partial_z \psi + \{ \psi, A_z \} = 0. \quad (6.32)$$

Переходя к безразмерным переменным из (6.31) и (6.32), имеем:

$$d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi = \{A, J\} - \partial_z J; \quad (6.33)$$

$$d_t A + \partial_z \Phi = 0, \quad J \equiv \nabla_{\perp}^2 A. \quad (6.34)$$

Здесь проведен переход к безразмерным единицам (6.10) и

$$\omega_{Bi} z / c_A \rightarrow z, \quad e A_z c_A / (c T_e) \rightarrow A. \quad (6.35)$$

Сравнивая (6.33) с (6.11), можно выделить члены, приносимые электронами посредством плотности продольного электрического тока J . Видно также, что функция тока пропорциональна электрическому потенциалу. Левая часть уравнения (6.34) равна E_{\parallel} -компоненту электрического поля вдоль магнитного. Вихревые решения системы (6.33), (6.34) при $\partial_z = 0$ называют конвективными ячейками. В ячейках происходит вращение плазмы вокруг силовых линий магнитного поля. В них $A = 0$, т.е. магнитное поле не возмущается, а функция тока Φ подчиняется уравнению $d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi = 0$. В [6.11] показано, что конвективные ячейки могут возбуждаться из-за параметрической неустойчивости монохроматической альфвеновской волны. Хорошо известны также покоящиеся вихревые решения, соответствующие так называемым магнитным островам. Им соответствует $\Phi = 0$ и уравнение $\partial_z J = \{A, J\}$, которое имеет решение в виде дорожки вихрей.

Найдем общие решения, бегущие со скоростью u и наклоненные под углом α к магнитному полю. Положим $\Phi = \Phi(x, \eta)$ $\eta = y + az - ut$ и аналогично для A . Тогда из (6.33), (6.34) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{\Phi}, \tilde{A}\} = 0; \quad \{\tilde{\Phi}, \nabla_{\perp}^2 \Phi\} = \{\tilde{A}, J\}; \\ \tilde{A} = A - \alpha x; \quad \tilde{\Phi} = \Phi - ux. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Из (6.36) имеем:

$$\tilde{A} = f_A(\tilde{\Phi}); \quad \nabla_{\perp}^2 \Phi = f_A' J + f_{\Phi}(\tilde{\Phi}), \quad (6.37)$$

где f_A и f_{Φ} — произвольные функции.

Таким образом, система (6.36), (6.37) имеет несчетное множество вихревых решений, что связано с тем, что в ней пренебрегалось дисперсионными эффектами.

Приведем простейшее из них. Введем круг радиусом a . Произвольные функции выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= (u/\alpha) A \text{ и} \\ \nabla_{\perp}^2 A &= 0, \quad r \geq a; \\ \nabla_{\perp}^2 A &= -k^2 (A - \alpha x - c), \quad r \leq a, \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

где k и c — постоянные. Уединенное решение, убывающее на бесконеч-

ности степенным образом, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 [J_0(kr) - J_0(ka)] + \frac{\alpha x}{r} \left[r - 2 \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} \right], \quad r < a; \\ A &= \alpha x (a/r)^2, \quad r \geq a. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Оно удовлетворяет при $r = a$ условию сшивки $A - \alpha x = 0$ при непрерывности $\nabla_{\perp} A$. Эти условия приводят к дисперсионному уравнению:

$$J_1(ka) = 0. \quad (6.40)$$

В этом решении амплитуда A_0 , размер a , скорость перемещения u и угол наклона α произвольны. Оно состоит из дипольного носителя и монополюсного ядра произвольной амплитуды. Таким образом, бегущий монополюсный вихрь всегда сопровождается носителем, спадающим степенным образом, параметры которого не зависят от амплитуды монополя. Устойчивость таких решений обеспечивается вмороженностью плазмы в магнитном поле (топологическая устойчивость). Отметим, что в отличие от линейных альфвеновских волн, которые бегут со скоростью c_A вдоль магнитного поля, скорость приведенных здесь вихрей, равная u/a , может принимать произвольные значения. Из этого можно сделать вывод, что такие вихри могут приводить к аномальному сопротивлению изотермической плазмы.

6.5. УЕДИНЕННЫЕ АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВИХРИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

В предыдущем параграфе были выведены уравнения альфвеновских вихрей в пренебрежении дисперсией. Как указывалось в [6.12–6.14], учет дисперсии одновременно с неоднородностью плотности может приводить к новым явлениям, присущим термодинамически неравновесным системам. В таких средах, как известно, возможны долгоживущие флуктуации большой амплитуды. Например, в переохлажденном паре достаточно большие капли жидкости существуют неопределенно долго. Неоднородная плазма также относится к термодинамически неравновесным системам. Известно [6.15], что в ней могут существовать линейные волны с "отрицательной энергией", амплитуда которых растет при наличии диссипации. Однако эта неустойчивость может стабилизироваться эффектами шира силовых линий. Но при учете нелинейности и дисперсии дрейфовые волны могут локализоваться в виде двумерных вихревых трубок настолько малых размеров, что они становятся не чувствительными к шире. Для альфвеновских волн это показано в [6.12, 6.14]. Найдено, что в неоднородной плазме энергия таких вихрей может стать отрицательной. Иными словами, образование альфвеновских вихрей выгодно энергетически. Это явление можно назвать конденсацией по аналогии с

образованием жидких капель в переохлажденном паре. Появление таких вихрей в лабораторной плазме вызывает конвективное перемешивание (хаотизацию) частиц поперек магнитного поля, что может быть причиной наблюдаемой аномальной теплопроводности. Отметим, что экспоненциальный спад в вихрях связан с учетом дисперсии альфвеновских волн (аналогично солитонам в диспергирующих средах). Без учета дисперсии, как это было показано в предыдущем параграфе, спад вихрей степенной. В неоднородной плазме энергия вихря со степенным спадом распространится и поэтому такие решения не представляют интереса. Кроме того, вихри со степенным спадом могут размываться под влиянием шири силовых линий.

Обобщим уравнения, полученные в предыдущем параграфе, на случай, когда становятся важными эффекты дисперсии альфвеновских волн. Рассмотрим плазму конечного давления $m_e/m_i < \beta \ll 1$. Будем считать, что характерный размер пакета a поперек магнитного поля находится в интервале $r_s \ll a \ll \kappa_n^{-1}$ (κ_n^{-1} — характерный размер неоднородности плазмы). Поперечные возмущения магнитного поля при этом по-прежнему выражаются через z -компонент векторного потенциала соотношением (6.30), а продольными возмущениями \mathbf{V} можно пренебречь. Электрическое поле вдоль магнитного поля $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\parallel$ дается соотношением

$$E_\parallel = -(\mathbf{V} \nabla \varphi) / B_0 - c^{-1} \partial_t A_z, \quad (6.41)$$

а поперечный компонент \mathbf{E} можно считать потенциальным и равным $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \varphi$. Для получения нелинейных уравнений альфвеновских волн в неоднородной плазме воспользуемся условием замыкания токов

$$\text{div} \mathbf{j} = \text{div} \mathbf{j}_\perp + \text{div} \mathbf{j}_\parallel = 0. \quad (6.42)$$

В нашем приближении

$$\text{div} \mathbf{j}_\parallel = -(c/4\pi) (\mathbf{V} \nabla) \nabla^2 (A_z / B_0). \quad (6.43)$$

В дивергенции поперечного тока вклад вносят только ионы. Учитывая выражение для f_1 из § 6.2 с точностью до членов порядка ϵ^3 , имеем:

$$\text{div} \mathbf{j}_\parallel = c B_0^{-1} \omega_{Bi}^{-1} \text{div} \{ (\partial_t + v_E \nabla) (en_0 \mathbf{E} - \nabla p) \}. \quad (6.44)$$

При $\beta > m_e/m_i$ в уравнении для продольного движения электронов можно пренебречь их инерцией, и тогда оно сводится к балансу между продольным электрическим полем и градиентом давления электронов:

$$eE_\parallel + (\mathbf{V} \nabla p_e) / (n_0 B_0) = 0. \quad (6.45)$$

Учет давления электронов p_e приводит к дисперсии. Вкладом колебаний плотности в (6.44) и (6.45) можно пренебречь, так как он дает пренебрежимо малые поправки — порядка ω/ω_{Bi} . Эти поправки важны в одномерном случае [6.10], когда исчезает более сильная векторная нелинейность. Последняя уже не содержит малого параметра ω/ω_{Bi} и потому в двумерном случае является определяющей.

Эту систему уравнений необходимо дополнить уравнением непрерывности для электронов:

$$(\partial_t + v_E \nabla) n - \operatorname{div}(j_{\parallel} / e) = 0 \quad (6.46)$$

и уравнением для давления ионов (6.9).

Удобно перейти к безразмерным переменным (6.10). В дополнение к ним положим $z\omega_{Bi}/c_A \rightarrow z$, $eA_z c_A / (cT_{e0}) \rightarrow A$. Отметим, что координата z измеряется в других единицах по сравнению с координатами поперек магнитного поля. При этом скорость вдоль z измеряется в единицах c_A , а поперек — в единицах c_S . В этих переменных полученные выше уравнения запишутся в виде:

$$d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi = -d_z J - \operatorname{div} \{ P, \nabla_{\perp} \Phi \}; \quad (6.47)$$

$$\partial_t A = d_z (N - \Phi), \quad J \equiv \nabla_{\perp}^2 A; \quad (6.48)$$

$$d_t N + d_z J = 0, \quad d_t P = 0, \quad (6.49)$$

где $d_z \equiv \partial_z - \{ A \dots \}$, $d_t \equiv \partial_t + \{ \Phi \dots \}$.

В пределе, когда скорость возмущений вдоль магнитного поля много меньше скорости Альфвена (т.е. когда $d_t \ll d_z$), из (6.48) следует $N \rightarrow \Phi$, а из (6.47) получаем неравенство $A \ll \Phi$. Подставляя J из (6.49) в (6.47), получаем уравнение потенциальных дрейфовых волн (6.11). Если при этом положить $T_i = 0$ (т.е. $P = 0$), то приходим к уравнению Хасегавы и Мимы [5.4, 5.5]. Таким образом, система (6.47)–(6.49) является универсальной, описывающей как дрейфово-альфвеновские, так и потенциальные дрейфовые волны. Она описывает пакет, локализованный в окрестности плоскости $x = 0$. Вдали от нее считаем, что

$$N \rightarrow \kappa_n x, \quad P \rightarrow \kappa_p x, \quad A = A_0(x), \quad \varphi = \varphi_0(x). \quad (6.50)$$

В дальнейшем для простоты κ_n и κ_p будем считать постоянными, а A_0 , φ_0 равными нулю, что соответствует отсутствию шира магнитного поля и амбиполярного электрического поля. Кривизну невозмущенного магнитного поля можно учесть добавлением члена вида $g \partial_y (N + P)$ (g — безразмерная эффективная сила тяжести) в левую часть уравнения (6.47). Такой эффект учитывался в [6.16] для случая желобковых возмущений. В линейном приближении система (6.47)–(6.49) дает дисперсионное уравнение дрейфово-альфвеновских волн (1.38). В безразмерных единицах оно имеет вид:

$$\left(1 + \frac{\kappa_n}{\omega} \right) \left[1 - \frac{\omega^2}{k_z^2} \left(1 - \frac{\kappa_p}{\omega} \right) \right] + k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{\kappa_p}{\omega} \right) = 0. \quad (6.51)$$

Удобно ввести возмущенную часть плотности $N_1 = N - \kappa_n x$. Тогда с учетом

$$\partial_t \int N_1 d^3 x = 0. \quad (6.52)$$

легко проверить, что система (6.47)–(6.49) имеет интеграл энергии

$$E = \int [(\nabla_{\perp} \Phi)^2 + (\nabla_{\perp} A)^2 + N_1^2 + 2\kappa_n x N_1] d^3 x. \quad (6.53).$$

Последний член в (6.53) соответствует "обмену энергией" между волной и плазмой. Он существует только в неоднородной плазме ($\kappa_n \neq 0$). Как будет показано в дальнейшем, этот член может привести к появлению вихрей с отрицательной энергией.

Покажем, что уравнения (6.47)–(6.49) имеют стационарное двумерное решение, локализованное экспоненциально. Пусть все величины зависят только от x и $\eta = y + az - ut$, где a – угол наклона вихря к магнитному полю; u – скорость его распространения. Тогда система (6.47)–(6.49) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \Phi &= [f_e(\tilde{A}) + f_{\Phi}(\tilde{\Phi})] / (1 + b_p); \\ \nabla_{\perp}^2 A &= f_A(\tilde{A}) - f'_e(\tilde{A}), \quad \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} \equiv \Phi - ux; \\ P &= b_p \tilde{\Phi}; \quad N = \tilde{\Phi} + f_e(\tilde{A}); \quad \tilde{A} \equiv A - ax, \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

где b_p – константа, а f – произвольные функции; штрих означает производную по аргументу. Как и ранее, представим f в виде кусочно-линейных функций:

$$f_e = b_e \tilde{A}; \quad f_A = b_A \tilde{A}; \quad f_{\Phi} = b_{\Phi} \tilde{\Phi}. \quad (6.55)$$

Тогда вместо (6.54) имеем:

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi = B(b_{\Phi} \tilde{\Phi} + b_e \tilde{A}); \quad B \equiv (1 + b_p)^{-1}; \quad (6.56)$$

$$\nabla_{\perp}^2 A = b_A \tilde{A} - b_e \tilde{\Phi}; \quad (6.57)$$

$$P = b_p \tilde{\Phi}; \quad N = \tilde{\Phi} + b_e \tilde{A}. \quad (6.58)$$

В полярной системе координат $r^2 = x^2 + \eta^2$, $\text{tg } \theta = \eta/x$ вводим круг радиусом a . На границе этого круга, как обычно, должны выполняться условия сшивки, аналогичные случаю потенциальных дрейфовых вихрей (§ 6.3). Однако, если потребовать одновременно обращения в нуль \tilde{A} и $\tilde{\Phi}$ на границе, то, как показано в [6.12], спад вихрей является степенным. Такие вихри обладают дальнедействием подобно вихрям в несжимаемой жидкости и поэтому могут легко стабилизироваться широм. Поэтому интерес представляют вихри с экспоненциальной локализацией. В [6.13, 6.14] показано, что экспоненциального спада можно добиться при выполнении только одного из условий $\tilde{\Phi}|_{\Gamma} = 0$ или $\tilde{A}|_{\Gamma} = 0$. В первом случае получаются только дипольные решения с разрывом продольного тока (пропорционального $\nabla_{\perp}^2 A$) на границе, во втором завихренность и ток непрерывны. Получить решения этой системы в виде суперпозиции дипольной и монопольной частей (подобно носителю и ядру в вихрях типа ЛР) не удастся.

Рассмотрим сначала решение с разрывом тока на границе между захваченными и пролетными частицами. Для этого коэффициенты b_p, b_Φ считаем постоянными всюду, а b_e и b_A пусть принимают разные постоянные значения внутри и вне круга. При этом, как будет показано ниже, получаются решения, спадающие экспоненциально на бесконечности. Вне круга решение ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= e_1 K_1(sr) \cos \theta \\ A &= a_1 K_1(sr) \cos \theta \end{aligned} \right\} r \geq a, \quad (6.59)$$

где K_1 — функция Макдональда. Поскольку на бесконечности $P \rightarrow \kappa_p x$, $N \rightarrow \kappa_n x$, то отсюда и из (6.55) получаем значения коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} b_e &= -(\kappa_n + u)/a, \quad r \geq a; \\ b_p &= -\kappa_p/u, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

Из условия локальности Φ и A и из (6.54), (6.55) следует:

$$\left. \begin{aligned} b_A &= b_e u/a = -u(\kappa_n + u)/a^2, \quad r \geq a; \\ b_\Phi &= 1 + \kappa_n/u, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Подставляя (6.59) в (6.54) с учетом (6.57), (6.58), получаем алгебраическую систему для определения коэффициентов e_1 и a_1 . Условие ее разрешимости дает выражение для коэффициента экспоненциального спада:

$$s^2 = (\kappa_n + u)/(u - \kappa_p - u/a^2). \quad (6.62)$$

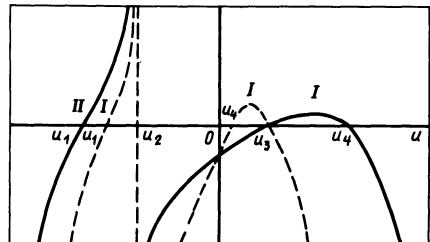
Область допустимых значений скорости u определяется условием положительности s^2 (рис. 6.2). Решения системы (6.54) в области $r \leq a$ ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi} &= [e_2 J_1(k_1 r) + e_3 J_1(k_2 r)] \cos \theta; \\ \tilde{A} &= [a_2 J_1(k_1 r) + a_3 J_1(k_2 r)] \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода. Подставляя (6.63) в (6.54), получаем однородную систему уравнений, условие разрешимости ко-

Р и с. 6.2. Зависимость квадрата коэффициента экспоненциального спада в вихрях s^2 от скорости u в случае $\beta > m_e/m_i$:

сплошной линии соответствует случай $a^2 > 2\kappa_n^2$; штриховой — $a^2 < 2\kappa_n^2$ ($\kappa_n = \kappa_p$); $u_1 = \kappa_n - (\kappa_n^2 + 4a^2)^{1/2}$; $u_2 = \kappa_n$; $u_3 = -\kappa_n$; $u_4 = \kappa_n + (\kappa_n^2 + 4a^2)^{1/2}$



торой определяет значения коэффициентов b_e и b_A внутри круга через коэффициенты $k_{1,2}$, b_Φ и b_P :

$$Bb_e^2 = (k_1^2 + Bb_\Phi)(k_2^2 + Bb_\Phi), \quad r < a; \quad (6.64)$$

$$b_A = -k_1^2 - k_2^2 - Bb_\Phi, \quad r < a, \quad (6.65)$$

где $B = (1 - \kappa_P/u)^{-1}$; $Bb_\Phi = (u + \kappa_n)/(u - \kappa_P)$.

Решения (6.59) и (6.63) необходимо сшить на границе $r = a$. Выражения (6.59) и (6.63) можно считать решениями, если при подстановке в систему (6.54) все члены в любой точке конечны. При этом допустимы разрывы в виде конечных скачков. Для этого при данном выборе коэффициентов в решении уравнений (6.54) достаточно потребовать непрерывности Φ и $\nabla_\perp \Phi$ (т.е. непрерывности плотности и скорости). Однако ввиду разрывности b_e и b_A на A необходимо положить более жесткое условие $\tilde{A} = 0$ при $r = a$ одновременно с требованием непрерывности $\nabla_\perp A$ (возмущенного магнитного поля). При этом, как легко видеть из (6.54), $\nabla_\perp \Phi$ непрерывен, а продольный ток, пропорциональный $\nabla_\perp^2 A$, терпит скачок на границе, что допустимо. Эти условия определяют коэффициенты в решениях (6.59) и (6.63):

$$a_1 = aa/(K_1(\mu)); \quad e_1 = aa_1/(u - \kappa_P), \quad r \geq a; \quad (6.66)$$

$$e_2 = \frac{k_1^2 + b_A}{b_e} a_2; \quad e_3 = \frac{(k_2^2 + b_A)}{b_e} \frac{J_1(l_1)}{J_1(l_2)}; \quad (6.67)$$

$$a_2 = \frac{a^2 \mu^2 b_e a}{(l_1^2 - l_2^2)(\kappa_n + u) J_1(l_1)}; \quad a_3 = -\frac{J_1(l_1)}{J_1(l_2)}, \quad (6.68)$$

где $\mu \equiv sa$; $l_{1,2} = k_{1,2}a$. Величины a , u , α , $k_{1,2}$ пока остаются произвольными.

Условия сшивки $\nabla_\perp A$ и $\nabla_\perp \Phi$ и условие $\tilde{A} = 0$ на границе приводят к дисперсионным уравнениям относительно $k_{1,2}$, отличающимся от дисперсионного уравнения ЛР для квазигеострофических вихрей (5.46):

$$\begin{aligned} & \frac{a_2 J_1(l_1)}{b_e} \{ J_1^2 g(l_1) - l_2^2 g(l_2) - b_A a^2 [g(l_1) - g(l_2)] \} = \\ & = \frac{\alpha^2 a^3}{u - \kappa_P} (1 - h) - ua^3; \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$a_2 J_1(l_1) [g(l_1) - g(l_2)] = -aah, \quad (6.70)$$

где

$$h(\mu) = \mu K_2(\mu)/K_1(\mu); \quad g(l) = 1 - U_2(l)/J_1(l). \quad (6.71)$$

С учетом дисперсионных уравнений (6.69), (6.70) неопределенными остаются параметры a , u и α . Согласно первоначальным приближениям необходимы условия $\kappa_n \sim \kappa_p \sim u \sim \alpha \ll 1$. Случай $\alpha = u$ соответствует распространению вихря вдоль \mathbf{B}_0 со скоростью Альфвена. Из условия, что размер вихря много больше r_s , следуют неравенства $a \gg 1$, $k_{1,2}, s \ll 1$. Заметим, что α (угол распространения в безразмерном пространстве) в размерном виде соответствует углу $\alpha c_s / c_A$. Покажем, что дисперсионные уравнения (6.69), (6.70) имеют решения. Заметим, что когда l_1 и l_2 находятся вблизи нулей J_1 , эти уравнения сильно упрощаются. Из теорий бесселевых функций известно, что

$$g(l) = 1 + 2l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 - \gamma_n^2}, \quad (6.72)$$

где γ_n — корни уравнения $J_1(\gamma_n) = 0$. С помощью этой формулы и разложения K_1 при малых значениях аргумента ($\mu \ll 1$) легко получить решение дисперсионных уравнений (6.69), (6.70) в окрестности полюсов $|l_1 - \gamma_1| \ll \gamma_1 \simeq 3,8$, $|l_2 - \gamma_2| \ll \gamma_2 \simeq 7,0$, $|u - u_1| \ll u_1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma_1}{l_1 - \gamma_1} &\simeq \frac{2a^2}{(u - u_1)(u_1 - u_2)} \left\{ 1 + \left[\frac{u_1 u_2}{a^2} \frac{\gamma_2^2 u_2 - a^2 (u_1 + \kappa_n)}{-\gamma_1^2 u_2 + a^2 (u_1 + \kappa_n)} \right]^{1/2} \right\}; \\ \frac{\gamma_2}{l_2 - \gamma_2} &\simeq \frac{2a^2}{(u - u_1)(u_1 - u_2)} \left\{ 1 + \left[\frac{u_1 u_2}{a^2} \frac{-\gamma_1^2 u_2 + a^2 (u_1 + \kappa_n)}{\gamma_2^2 u_2 - a^2 (u_1 + \kappa_n)} \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

где (см. рис. 6.2) $u_{1,2} = (1/2) [\kappa_n \pm (\kappa_n^2 + 4a^2)^{1/2}]$; $-\kappa_n < u < u_1$. При этом $a^2 > 2\kappa_n^2$. Это означает, что рассматриваемые вихри являются дольфеновскими (скорость их распространения вдоль \mathbf{B}_0 меньше альфвеновской). Наличие корней доказывает существование альфвеновских вихревых трубок, спадающих на бесконечности экспоненциально. Все параметры трубки выражаются через три свободных параметра: a , u и α . Трубка представляет собой диполь с положительной и отрицательной завихренностями.

С помощью полученных выше формул легко оценить, что

$$\Phi \sim A \sim u_1 a. \quad (6.74)$$

Отсюда получаем, что характерная скорость вращения ν и возмущение магнитного поля в вихре δB имеют следующий порядок:

$$\nu / c_A \sim \delta B / B_0 \sim \beta^{1/2} \kappa_n' r_s. \quad (6.75)$$

В неоднородной плазме особый интерес представляют вихри, бегущие с

дрейфовой скоростью $u \approx -\kappa_n$ (у них, как будет видно из дальнейшего, энергия может быть отрицательной). В таких вихрях $v \approx u$.

Рассмотрим теперь более гладкое решение, в котором и продольный ток непрерывен. Для этого коэффициенты b_e и b_A будем считать постоянными всюду, а b_Φ пусть принимает разные постоянные значения внутри и вне круга. Решение ищем по-прежнему в виде (6.56), (6.58). После сшивки их на границе $r = a$, где $\Phi' = 0$, получаем, что коэффициенты в (6.56), (6.58) определяются следующими соотношениями:

$$b_P = -\kappa_P/u; \quad b_e = -\frac{\kappa_n+4}{a}; \quad b_A = -\frac{u(u+\kappa_n)}{a^2}, \quad 0 < r < \infty. \quad (6.76)$$

Коэффициент b_Φ внутри и вне круга принимает следующие значения:

$$b_\Phi = 1 + \kappa_n/u, \quad r > a; \quad (6.77)$$

$$Bb_\Phi = -\frac{l_1^2}{a^2} - \frac{Bb_e^2 a^2}{l_1^2 + b_A^2 a^2}, \quad r \leq a. \quad (6.78)$$

Значение a определяется соотношением

$$a^2 = \frac{1}{2s^2} \left[\sqrt{(l_1^2 + l_2^2)^2 - \frac{4l_1^2 l_2^2 s^2}{b_A}} - (l_1^2 + l_2^2) \right], \quad (6.79)$$

где s по-прежнему выражается формулой (6.62).

Коэффициенты в (5.59), (6.63) определяются из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{ua}{K_1(\mu)}; \quad a_1 = \frac{(u-\kappa_P)}{a} e_1; \\ e_2 &= \frac{u\mu^2 a}{(l_2^2 - l_1^2)J_1(l_1)}; \quad e_3 = -\frac{J_1(l_1)}{J_1(l_2)} e_2; \\ a_2 &= \frac{e_2 b_e}{k_1^2 + b_A}; \quad a_3 = -\frac{e_2 b_e}{k_2^2 + b_A} \frac{J_1(l_1)}{J_1(l_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

Дисперсионные уравнения, аналогичные (6.69), (6.70), в этом случае имеют вид:

$$\frac{g(l_2) - g(l_1)}{l_2^2 - l_1^2} = \frac{h(\mu)}{\mu^2}; \quad (6.81)$$

$$\frac{l_2^2 g(l_1) - l_1^2 g(l_2) - b_A a^2 [g(l_2) - g(l_1)]}{l_2^2 - l_1^2} = 1 - \frac{b_A a^2 h}{\mu^2}. \quad (6.82)$$

В отличие от предыдущего решения, где вихревые трубки характеризу-

вались тремя свободными параметрами, здесь радиус a задан и свободными являются только два параметра: u и α . Аналогично предыдущему дисперсионные уравнения (6.81) и (6.82) упрощаются в окрестности нулей бесселевых функций:

$$l_1 \approx \gamma_1 (1 + \mu^2 / (2\gamma_1^2)); \quad (6.83)$$

$$l_2 \approx \gamma_2 (1 + \mu^2 / (2\gamma_2^2)). \quad (6.84)$$

Размер вихря a при этом равен

$$a^2 = 11,3 \frac{u_1 - \kappa_p}{u_1 + \kappa_n} \gg 1. \quad (6.85)$$

Следует отметить, что при получении решений во внутренней области мы должны потребовать действительность волновых чисел $k_{1,2}$, что приводит к ограничению на коэффициенты:

$$Bb_\Phi + b_A < 0; \quad (b_\Phi b_A - b_e^2) > 0. \quad (8.86)$$

Нетрудно проверить, что эти условия удовлетворяются при $-\kappa_n/u < 1$, что соответствует участкам I и II на рис. 6.2. Соотношения между различными величинами в этом вихре по порядку такие же, как и в вихре с разрывом завихренности. В [6.17] было получено решение в виде синтеза этих двух. В нем вводятся две линии сшивки, являющиеся концентрическими окружностями. На одной из них $\tilde{\Phi} = \text{const}$, а на другой $\tilde{A} = \text{const}$. В таком решении уже четыре свободных параметра.

6.6. УЕДИНЕННЫЕ АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВИХРИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ МАЛОГО ДАВЛЕНИЯ

При $\beta < m_e/m_i$ скорость Альфвена становится больше тепловой скорости электронов. В силу этого в уравнениях альфвеновских волн колебаниями давления электронов можно пренебречь по сравнению с колебаниями кинетической энергии электронов (эффект конечности массы электронов). При этом вместо уравнений (6.47) – (6.49) имеем [6.14]:

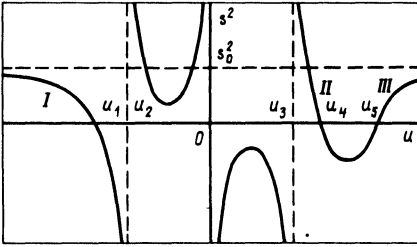
$$d_t \nabla_\perp^2 \Phi = -d_z J; \quad J \equiv \nabla_\perp^2 A; \quad (6.87)$$

$$\partial_t A - \epsilon d_r J = d_z (N - \Phi); \quad (6.88)$$

$$d_t N = -d_z J; \quad \epsilon \equiv m_e / (\beta m_i). \quad (6.89)$$

В этих уравнениях характерный размер дисперсии порядка r_{Bi}/ϵ , что равно скинковой длине c/ω_{pe} , которая ввиду $\beta < m_e/m_i$ больше r_s . В связи с этим колебаниями давления ионов также можно пренебречь. Эта система сохраняет интеграл энергии в виде

$$E = \int [(\nabla_\perp A)^2 + (\nabla_\perp \Phi)^2 + \epsilon J^2 + N^2 + 2\kappa_n x N_1] d^3x. \quad (6.90)$$



Р и с. 6.3. Зависимость квадрата коэффициента экспоненциального спада в вихрях s^2 от скорости u в случае $\beta < m_e/m_i$:

$$u_1 = -\alpha; u_2 = -\alpha\epsilon^{-1/2}; u_3 = \alpha\epsilon^{-1/2}; \\ u_4 = \alpha; u_5 = -\kappa_n; s_0^2 = \epsilon^{-1}$$

Так же как и в случае плазмы конечного давления, альфвеновские волны очень чувствительны к неоднородности. Ввиду этого последний член в (6.90) в некоторых случаях может привести к отрицательной энергии.

Действуя аналогично предыдущему параграфу, находим уравнения стационарного вихря в виде

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi = b_{\Phi} \tilde{\Phi} - b_e \tilde{A}; \quad (6.91)$$

$$J = b_A \tilde{A} - b_e \tilde{\Phi}; \quad (6.92)$$

$$N = (1 - \epsilon b_A) \tilde{\Phi} + b_e \tilde{A}, \quad (6.93)$$

где $\Phi = \Phi(x, \eta)$; $\eta = y + az - ut$.

Вводим также круг радиусом a . Коэффициенты b_e и b_A считаем постоянными всюду и определяем из условия исчезновения вихря на бесконечности. Коэффициент b_{Φ} разрывен. Вне круга определяем его из этих же условий, а внутри круга — из условий шивки. Из-за разрывности b_{Φ} на границе необходимо выполнение условия $\tilde{\Phi}|_{r=a} = 0$. Отсюда и из условия непрерывности A получаем следующие соотношения:

$$b_e = \frac{\alpha(u + \kappa_n)}{\epsilon u^2 - \alpha^2}; \quad b_A = \frac{u(u + \kappa_n)}{\epsilon u^2 - \alpha^2}, \quad 0 < r < \infty; \quad (6.94)$$

$$b_{\Phi} = -\frac{\alpha^2}{u} \frac{(u + \kappa_n)}{\epsilon u^2 - \alpha^2}, \quad r > a. \quad (6.95)$$

Размер вихря a и коэффициент b_{Φ} внутри круга, как и в случае плазмы конечного давления, определяется соотношениями (6.78), (6.79).

Решения уравнений (6.91), (6.93) по форме совпадают с решениями (6.56), (6.58). Отличие состоит в том, что при $\beta < m_e/m_i$ s^2 выражается формулой (рис. 6.3):

$$s^2 = \frac{u + \kappa_n}{u} \frac{u^2 - \alpha^2}{\epsilon u^2 - \alpha^2}. \quad (6.96)$$

Шивка $\nabla_{\perp} \Phi$ и $\nabla_{\perp} A$ на границе приводит к дисперсионным уравнениям вида (6.69), (6.70), где, однако, b_A определено соотношением (6.94).

Таким образом, вихри в случае $\beta < m_e/m_i$ отличаются от вихрей в плазме с $\beta > m_e/m_i$ только выражениями для коэффициентов (6.94), (6.95), а также значением a_1 :

$$a_1 = \frac{ue_1}{a} = \frac{u^2 a}{aK_1(\mu)}. \quad (6.97)$$

В случае плазмы малого давления $\beta < m_e/m_i$, так же как и в случае $\beta > m_e/m_i$, необходимо выполнить условия, при которых решения во внутренней области могут быть получены в виде (6.63). В данном случае эти условия выглядят следующим образом:

$$b_\Phi + b_A < 0; \quad b_\Phi b_A - b_e^2 > 0. \quad (6.98)$$

Используя (6.78), (6.94) аналогично предыдущему параграфу, получаем, что условия (6.98) выполняются при

$$a^2 \epsilon^{1/2} < u < |\kappa_n|, \quad (6.99)$$

т.е. на участке II рис. 6.3.

Ветви решений I, III на рис. 6.3 при $s^2 \rightarrow 0$ вблизи соответственно u_1 и u_5 отвечают обратному неравенству в (6.98), что соответствует решению уравнений (6.87)–(6.89) во внутренней области в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi} &= [e_2 J_1(k_1 r) + e_3 I_1(k_2 r)] \cos \theta; \\ \tilde{A} &= [a_2 J_1(k_1 r) + a_3 I_1(k_2 r)] \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.100)$$

где I_1 – модифицированная функция Бесселя.

6.7. КОНДЕНСАЦИЯ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В ВИХРЕВЫЕ ТРУБКИ

Выясним, как энергия вихревых трубок зависит от их параметров. Поскольку они имеют бесконечную протяженность, то естественно говорить об энергии на единицу длины. При этом погонная энергия трубки как в случае плазмы малого, так и конечного давления имеет вид:

$$W = \int [(\nabla_{\perp} A)^2 + (\nabla_{\perp} \Phi)^2 + \epsilon J^2 + N_1^2 + 2\kappa_n x N_1] dx d\eta. \quad (6.101)$$

Подставляя полученные выше решения, отсюда можно получить выражения энергии как функцию параметров трубки. В общем случае оно имеет громоздкий вид. Однако в предельных случаях, рассмотренных ранее, оно упрощается. Так, в случае вихрей с разрывом продольного тока

$$W = -4\pi a^2 \kappa_n^2 / s^2, \quad \kappa_n^2, s^2 \ll 1, \quad (6.102)$$

а для вихрей с непрерывным током

$$W = -\frac{4\pi u(u - \kappa_p) \kappa_n^2 a^2}{\alpha^2 s^2}, \quad \beta > m_e/m_i; \quad (6.103)$$

$$W = - \frac{4\pi i \kappa_n^2 a^2 (\epsilon - 1)}{(\epsilon u^2 - a^2) s^2}, \quad \beta < m_e/m_i, \quad (6.104)$$

где в (6.103) s дается формулой (6.62), а в (6.104) определено (6.96).

Из (6.102)–(6.104) видно, что в неоднородной плазме ($\kappa_n \neq 0$) энергия вихревых трубок отрицательна. Тогда, если в системе существует диссипация, то энергия, уменьшаясь, будет расти по модулю. Отсюда следует, что в неоднородной плазме альфвеновским волнам энергетически выгодно сконденсироваться в структуры в виде вихревых трубок. Рассмотрим их поведение под влиянием диссипации. Простейший вид диссипации — это магнитная вязкость, вызванная конечной проводимостью. При учете этого эффекта уравнение для продольного движения электронов (6.88), справедливое как при конечных, так и при малых β , запишется в виде:

$$\partial_t A - \epsilon d_t J + d_z (\Phi - N) = \nu \nabla_{\perp}^2 A, \quad (6.105)$$

где ν — коэффициент магнитной вязкости в безразмерном виде. [Вообще говоря, ν — оператор (см. (6.110)]. При этом энергия E уже не постоянна, а меняется во времени по формуле

$$\partial_t E = - 2 \int \nu (\nabla_{\perp} A)^2 d^3 x. \quad (6.106)$$

В приближении малости диссипации в (6.106) можно подставить решения в виде найденных выше вихрей, считая, что параметры u , a , α являются медленными функциями времени. Из (6.106) видно, что из-за отрицательности W [формулы (6.102)–(6.104)] под действием диссипации вихревые трубки становятся мощнее (растет их размер и скорость вращения).

Альфвеновские волны — самая распространенная ветвь колебаний в лабораторной и космической плазме. Они играют важную роль в процессах ускорения частиц в магнитосфере Земли, турбулентном перемешивании плазмы и т.д. При учете дисперсии эта мода зацепляется за дрейфовую, что приводит к обменному взаимодействию между волной и плазмой из-за неоднородности. В результате свободная энергия плазмы, связанная с неоднородностью, под влиянием диссипации переходит в вихревые движения. В области пересечения мод эффектами конечного ларморовского радиуса ионов можно пренебречь, как не влияющими на зацепление, а учесть только эффекты продольного электрического поля. Выше были получены уравнения, учитывающие такие эффекты. С помощью этих уравнений выше было показано, что альфвеновские волны организуются в виде вихревых трубок с экспоненциально сильной локализацией. Проведенное здесь исследование их энергии показывает, что в неоднородной плазме она может стать отрицательной. Поэтому их образование выгодно энергетически подобно конденсации пара в капле жидкости. Такие вихри могут существовать и расти в плазме с широм, ус-

тойчивой в линейном приближении. Они могут развиваться из сильных флуктуаций. Такие флуктуации возникают при ВЧ-нагреве, при неустойчивости срыва, при инжекции частиц и т.д. Поэтому следует ожидать, что в плазме могут быть скопления таких трубок. Их размер ограничивается только широм магнитного поля. Ввиду конечной протяженности они могут приводить к конвективному перемешиванию плазмы. Этим можно объяснить наблюдаемую высокую теплопроводность и диффузию плазмы, значительно превышающую классическую.

6.8. ДИССИПАТИВНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ДРЕЙФОВЫХ ВИХРЕЙ

Современная теория аномальных переносов в плазме [6.18] предсказывает, что основной вклад в электронную теплопроводность дают надтепловые флуктуации размером порядка скин-длины. Это связано с исчезновением в замороженности электронов в магнитное поле на таких масштабах. Однако в линейном приближении возмущения магнитного поля такого размера устойчивы. В [6.19] показано, что из-за нелинейных эффектов возможно возникновение и усиление уединенных структур в виде вихревых трубок, которые отличаются от рассмотренных выше уединенных альфвеновских вихрей малым диаметром (много меньше r_{Bi}). Оказывается, что такие вихри бегут со скоростью, меньшей дрейфовой. Поэтому их амплитуда может расти под влиянием затухания Ландау или столкновительной диссипации на электронах. Это явление аналогично линейной дрейфово-диссипативной неустойчивости потенциальных дрейфовых волн (см. гл. 1). Эти волны усиливаются из-за того, что в линейном случае скорость их распространения меньше дрейфовой скорости.

Поскольку размер таких вихрей меньше r_{Bi} , а частота много меньше ω_{Bi} , то плотность ионов n в электрическом потенциале вихря φ распределена по Больцману:

$$\bar{n} = n_0 (1 + \kappa_n \varphi - \tau \Phi); \quad \tau = T_e/T_i; \quad n_0, \kappa_n = \text{const.} \quad (6.107)$$

Электронный же компонент согласно (6.48), (6.49) можно описать следующей системой безразмерных уравнений:

$$d_t N = d_z \nabla_{\perp}^2 A; \quad (6.108)$$

$$-(1 + \nu) E_{\parallel} = d_z N, \quad (6.109)$$

где (6.108) — уравнение непрерывности электронов с учетом продольного тока, (6.109) — уравнение движения электронов в магнитном поле, которое в рассматриваемом здесь случае, когда скорость волны вдоль z много меньше νT_e , сводится к балансу между градиентом давления электронов и продольным электрическим полем $E_{\parallel} = -d_z \Phi - \partial_t A$.

Аналогично предыдущему в (6.108), (6.109) проведем переход к безразмерным переменным. Оператор ν в (6.109) описывает диссипацию на электронах в линейном приближении. Сравнивая с линейной теорией (см. § 1.3), легко получить, что фурье-спектр этого оператора равен

$$\nu_{\mathbf{k}, \omega} = i \sqrt{\pi} (\omega + \kappa_n k_y) / |k_z| \nu_{Te}. \quad (6.110)$$

Пользуясь условием квазинейтральности, подставим (6.107) в (6.108), (6.109). Временно пренебрегая диссипацией, получаем систему уравнений мелкомасштабных дрейфовых волн:

$$\tau \partial_t \Phi + \kappa_n \partial_y \Phi = d_z \nabla_{\perp}^2 A; \quad (6.111)$$

$$\partial_t A - \kappa_n \partial_y A = - (1 + \tau) d_z \Phi. \quad (6.112)$$

В линейном приближении из нее следует дисперсионное уравнение (1.39), описывающее две ветви колебаний, бегущие в сторону дрейфовой скорости ионов или электронов соответственно. Обе ветви устойчивы, так как их скорости больше дрейфовых скоростей. Однако, как увидим при учете нелинейности, эти ветви сливаются и могут образовать вихри, скорость которых находится в промежутке между дрейфовыми скоростями ионов и электронов. А как следствие этого они могут усиливаться под влиянием затухания Ландау. Это видно из выражения для фурье-компонента оператора затухания (6.110). Он меняет знак при $|\omega| < |\kappa_n k_y|$. Найдём стационарное двумерное решение (6.111), (6.112), бегущее под углом к магнитному полю со скоростью u . Пусть все величины зависят от x и $\eta = y + az - ut$. Тогда из (6.112) имеем:

$$\Phi(x, \eta) = \frac{u + \kappa_n}{a(1 + \tau)} A(x, \eta). \quad (6.113)$$

Постоянная интегрирования в (6.113) определена из условия убывания Φ, A на бесконечности. С учетом (6.113) из (6.111) получим:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 A - as^2 x &= f(A - ax); \\ s^2 &\equiv \frac{(\kappa_n + u)(\kappa_n - \tau u)}{a^2(1 + \tau)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

где f — произвольная функция. Уравнение (6.114) решаем методом ЛР. Для существования достаточно локализованного решения необходимо, чтобы $s^2 \gg 1$, что достигается, если скорость распространения находится в интервале между дрейфовыми скоростями ионов κ_n/τ и электронов $-\kappa_n$. Вводим координату $r = (x^2 + \eta^2)^{1/2}$ и представляем f в виде линейной функции с разными коэффициентами внутри и вне круга с радиусом $a \ll r_{Bj}$. Коэффициенты подбираем таким образом, чтобы получилась локализованное решение (6.114) в виде

$$A = b_0 F_0(r) + a a F_1(r) x / r. \quad (6.115)$$

Здесь F_0 , F_1 — непрерывные вместе с первой производной функции, выражающиеся через функции Бесселя внутри круга и функции Макдональда снаружи. На границе сшивки $r = a$ необходимо положить $A - a x = \text{const}$. Амплитуда b_0 , угол a , радиус a и скорость u остаются произвольными. Решение (6.115) спадает на бесконечности как $\exp(-sr)$.

Исследуем влияние диссипации на полученное решение. Для этого заметим, что система (6.111), (6.112) сохраняет интеграл

$$W = \int [(\nabla_{\perp} A)^2 + \tau(1 + \tau)\Phi^2] d^3x. \quad (6.116)$$

При учете диссипации в том виде, как в (6.109), этот интеграл меняется во времени:

$$\partial_t W = - \int \nabla_{\perp}^2 A \nu E_{\parallel} d^3x. \quad (6.117)$$

Считая, что диссипация мала, в (6.117) можно подставить решение (6.113) и (6.115). Тогда, переходя к безразмерному виду в (6.117) и учитывая, что согласно (6.113) в стационарном вихре $\omega = k_y u$, получаем:

$$\partial_t W = |\alpha| s^2 c_A \nu_{Te}^{-1} \int k^2 |k_y| |A_k|^2 d^3k. \quad (6.118)$$

Отсюда видно, что W растет со временем. При этом амплитуда b_0 может расти без изменения a , u , a . С ростом амплитуды образуется плато и затухание Ландау переходит в слабостолкновительную диссипацию [0.7]. Это несколько замедляет рост вихрей.

Таким образом, видно, что при учете нелинейности пакеты электронных дрейфовых волн размером, меньшим r_{Bi} , образуют вихревые трубки (электронные вихри), распространяющиеся медленнее дрейфовой скорости. Вследствие этого диссипация на электронах приводит к расщепке этих вихрей до значений плотности энергии, сравнимых с тепловой. Коэффициенты переноса при таких флуктуациях получены в [6.18].

6.9. ЖЕЛОБКОВЫЕ ВИХРИ

В предыдущих параграфах были рассмотрены вихри, скорость которых вдоль магнитного поля порядка скорости Альфвена. Дисперсионные и нелинейные свойства таких волн допускают существование самолокализованных двумерных волновых пакетов, размер которых ограничен снизу только ларморовским радиусом ионов или скин-длиной. Такая сильная локализация позволяет пренебречь неоднородностью внешнего магнитного поля.

В желобковых возмущениях, в которых скорости распространения вдоль \mathbf{B}_0 много больше ν_{Te} , c_A , этот механизм локализации несущест-

вен: В этом случае оказывается, что локализация обеспечивается эффектом искривленности силовых линий внешнего магнитного поля [6.20, 6.21]. В тороидальных плазменных ловушках наряду с кривизной существенную роль играют также эффекты шири.

В линейном приближении существует трудность в описании колебаний неоднородной плазмы в кривом магнитном поле из-за неприменимости квазиклассического приближения. Однако если амплитуда волн конечна, то оказывается, что волновые пакеты сами локализуют себя, что упрощает задачу, поскольку допускается рассмотрение в локальном приближении с использованием малого параметра — отношения размера пакета к размеру неоднородности. Желобковые вихри почти параллельны силовым линиям невозмущенного магнитного поля. Поэтому для их описания воспользуемся уравнениями (6.47)–(6.49), в которых положим $\partial_z = 0$. Кривизну магнитного поля для простоты учтем введением эффективного ускорения свободного падения в уравнение завихренности (6.47). Тогда оно переписется в виде

$$d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + \text{div} \{ P_i, \nabla_{\perp} \Phi \} + g \partial_y P = \{ A, J \}, \quad (6.119)$$

где $P = P_i + P_e$ — полное давление плазмы. В остальных уравнениях просто полагаем $\partial_z = 0$. Тогда имеем:

$$d_t P_e = \{ A, J \}; \quad d_t P_i = 0; \quad d_t A = \{ P_e, A \}. \quad (6.120)$$

В линейном приближении система (6.119), (6.120) приводит к дисперсионному уравнению желобковых колебаний (1.40). Она имеет интеграл энергии:

$$E = \int [(\nabla_{\perp} \Phi)^2 + (\nabla_{\perp} A)^2 + P_e^2 - 2xgP + 2x^2g(\kappa_e + \kappa_i) - \kappa_e^2 x^2] d^2x. \quad (6.121)$$

Кроме того, сохраняются интегралы

$$\int A P_e d^2x; \quad \int f(P_i) d^2x; \quad \int P_e d^2x. \quad (6.122)$$

Здесь учтено, что вдали от возмущений $P_{e,i} \rightarrow \kappa_{e,i} x$.

Будем искать локализованное решение системы (6.119), (6.120). Положим, что оно бежит со скоростью u вдоль y . При условии локальности вихря u оказывается собственным числом задачи, а решение имеет вид:

$$P_i = \kappa_i (x - \Phi/u), \quad A = A(x); \quad (6.123)$$

$$P_e = \kappa_e (x - \Phi/u), \quad u = u_e = -\kappa_e. \quad (6.124)$$

Отметим, что решения (6.123), (6.124) существуют только при $u = u_e$, где u_e — безразмерная дрейфовая скорость электронов. Отсюда видно, что когда волна бежит с дрейфовой скоростью электронов, то A является произвольной функцией, а электрическое поле потенциально. Это означает, что вихри со скоростью u_e не чувствительны к произвольному сильному шире. При $u = u_e$ магнитное поле оказывается не зависящим

от времени. Поскольку $B_y(x)/B_0 = -\partial_x A$, $B_y(0) = 0$, $B_x = 0$, магнитное поле не возмущается потому, что оно заморожено в электроны. Подставляя (6.123), (6.124) в (6.119), после интегрирования получаем

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi = xg + F(\Phi - x u_e), \quad (6.125)$$

где F — произвольная функция. Это уравнение решается методом ЛП и решение имеет вид (5.43). При этом в (5.41), (5.42) нужно положить $\kappa^2 = g/u_e$. В силу этого в желобковых вихрях при наличии шира число свободных параметров на один меньше, так как их скорость является собственным числом задачи. Поскольку вихрь бежит с дрейфовой скоростью электронов u_e , то в системе отсчета, движущейся с этой скоростью, электрическое поле не зависит от времени и, следовательно, отсутствует резонансное взаимодействие с электронами. Отметим, что при удалении от центра вихрь спадает экспоненциально быстро. С ростом диаметра a растет эффективное волновое число вдоль \mathbf{V}_0 , пока не начнется затухание Ландау на ионах. По порядку фазовая скорость вихря вдоль магнитного поля равна $u_e/(k_{\parallel} a)$ и должна быть больше тепловой скорости ионов. Учитывая, что на краю вихря $k_{\parallel} \simeq k_{\perp} a/L_s$ (L_s — характерная длина шира) и что в нашем случае $k_{\perp} a \simeq 1$, получаем оценку максимального размера вихря $a < r_s L_s/L_p$. Заметим, что вихрь существует только там, где $g < 0$, т.е. в области неблагоприятного магнитного дрейфа, где направление градиента магнитного поля направлено в ту же сторону, что и градиент давления плазмы. В центральной части вихря его ось параллельна магнитному полю, а на периферии, где магнитное поле из-за шира наклонено, он соответствует альфвеновской моде. Поэтому такие вихри естественно называть желобково-альфвеновскими.

В отсутствие шира система (6.119), (6.120) упрощается [6.20], поскольку можно положить $A = 0$, т.е. магнитное поле не возмущается при любой скорости вихря. Тогда имеем:

$$d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + \text{div} \{N, \nabla_{\perp} \Phi\} + 2g \partial_y N = 0; \quad (6.126)$$

$$d_t N = 0. \quad (6.127)$$

Здесь учтено, что в желобковых волнах $P_e = P_i = N$, т.е. относительные возмущения давлений ионов и электронов совпадают с относительным возмущением плотности $N = n/n_0 - 1$. При удалении от вихря $N \rightarrow \kappa_n x$.

Уравнения (6.126), (6.127) имеют интеграл энергии:

$$E = \int [(\nabla_{\perp} \Phi)^2 - 4xgN + 4x^2 \kappa_n g] d^2 x. \quad (6.128)$$

В линейном приближении при $\kappa_n g < 0$ эти уравнения по-прежнему описывают желобковую неустойчивость. С учетом нелинейности они имеют решения в виде уединенных желобковых вихрей. Если вихрь бежит со скоростью u вдоль y , то из (6.127) получаем:

$$N = \kappa_n (x - \Phi/u), \quad \Phi = \Phi(x, y - ut). \quad (6.129)$$

Подставляя (6.129) в (6.126), имеем:

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi - \kappa^2 ux = F(\Phi - ux), \quad (6.130)$$

где $\kappa^2 = 2g\kappa_n/(u(\kappa_n - u))$; F – произвольная функция.

Уединенные решения существуют только при $\kappa^2 > 0$, что накладывает ограничения на область допустимых значений u . Как уже отмечалось, при наличии шира допустимо только $u = -\kappa_n$. Подставляя (6.129) в (6.130), получаем собственную энергию вихря:

$$E = \int \left[(\nabla_{\perp} \Phi)^2 + \frac{4\kappa_n g}{u} x \Phi \right] d^2x. \quad (6.131)$$

Из (6.131) после подстановки уединенных решений (6.130) следует, что, поскольку в неустойчивой области $\kappa_n g < 0$, энергия вихря может стать отрицательной и неограниченной снизу. Это означает, что желобковые вихри могут усиливаться за счет диссипации.

6.10. УЕДИНЕННЫЕ БАЛЛОННЫЕ ВИХРИ

Выше были рассмотрены желобковые вихри без продольного тока, в которых магнитное поле не возмущалось. При учете возмущений продольного тока они переходят в баллонные вихри. В таких вихрях необходим более точный учет геометрии магнитного поля. Как и в § 1.4, где анализировалась желобковая неустойчивость, для исследования баллонных вихрей используем эйлеровы координаты, описывающие криволинейное магнитное поле. Решение, полученное в таких координатах [6.21], позволяет, во-первых, описать реальную пространственную структуру вихрей, которая отличается от изучавшейся структуры в прямом магнитном поле, и, во-вторых, точнее учесть эффекты сжимаемости плазмы. Это сказывается уже в линейном приближении (см. § 1.4).

При исследовании баллонных мод исходим из уравнения замыкания токов (6.42), уравнения продольного движения электронов в пренебрежении инерцией (6.45) и уравнений для давлений ионов и электронов, в которых в отличие от альфвеновских волн учтен эффект сжимаемости дрейфовой скорости v_E , связанной с кривизной магнитного поля. Последние два уравнения в пренебрежении дрейфовыми эффектами принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} d_t p_i + \gamma p_i \operatorname{div} v_E &= 0; \\ d_t p_e + \gamma p_e \operatorname{div} v_E - \gamma p_e \operatorname{div} \left[\mathbf{j}_{\parallel} / (en) + \frac{\mathbf{B}_{\perp} (j B_0)}{B_0^2} \right] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.132)$$

где в уравнении для давления электронов учтены колебания продольного тока. Невозмущенное криволинейное поле \mathbf{B}_0 описывается с помощью эйлеровых координат x_0^1, x_0^2, x_0^3 соотношением вида (1.54).

Считаем, что они ортогональны друг другу, т.е. $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$. В дальнейшем удобно перейти к косоугольной системе координат x^1, x^2, x^3 преобразованием

$$x^1 = x_0^1; \quad x^2 = x_0^2 + \alpha x_0^3; \quad x^3 = x_0^3, \quad (6.133)$$

где α — константа. В новых координатах магнитное поле \mathbf{B}_0 имеет компонент $\mathbf{B}_0^2 = \alpha/\sqrt{g}$ вдоль оси x^2 . Электрическое и поперечное магнитные поля описываем с помощью потенциалов φ и A :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - c^{-1}\partial_t A \nabla x^3; \quad \mathbf{B}_\perp = [\nabla A, \nabla x^3]. \quad (6.134)$$

Интегрируя исходные уравнения по x^3 аналогично § 1.4, приходим к следующей системе уравнений [6.21]:

$$\{U, p_e + p_i\} + \rho_0 c d_t \Delta_2 \varphi + (\alpha/4\pi) d_{\parallel} \Delta_2 A = 0; \quad (6.135)$$

$$\partial_t A + \partial_1 p_{0e} \partial_2 A + c \alpha d_{\parallel} [\varphi - p_e / (en_0)] = 0; \quad (6.136)$$

$$U d_t p_{Ue,i} + c \gamma p_{0e,i} \{ \varphi, U \} = 0; \quad (6.137)$$

$$d_t p_{pe,i} + c \{ \varphi, p_{0e,i} \} = 0; \quad (6.138)$$

$$d_t p_{de} + c \gamma p_{0e} [(\alpha/(4\pi en_0)) d_{\parallel} \Delta_2 A] = 0. \quad (6.139)$$

Здесь обозначения те же, что и в § 1.4. В дополнение к ним

$$d_{\parallel} \equiv \partial_2 - \alpha^{-1} \{ A \dots \}; \quad \Delta_2' \equiv U'_{11} \partial_2^2 + U'_{22} \partial_2'^2.$$

В (6.135)–(6.138) возмущенное давление ионов и электронов представлено в виде $p = p_U + p_p + p_d$, т.е. в виде суммы возмущений давления, обусловленных соответственно неоднородностями магнитного поля и давления, а последний член связан с дисперсионными эффектами. В отличие от прямого в кривом магнитном поле существенны эффекты сжимаемости плазмы, $\text{div} \mathbf{V}_E \neq 0$, в силу чего в возмущенном давлении появляется дополнительное слагаемое p_U . Величины U, U_{ik}, U'_{ik} пропорциональны длине возмущений вдоль магнитного поля, поэтому при малых поперечных размерах по отношению к продольным в уравнениях (6.135)–(6.139) можно в отличие от § 1.4 пренебречь граничными эффектами. Кроме того, считаем, что возмущения мелкомасштабны по отношению к характерным размерам неоднородностей давления плазмы и поля.

Для определенности положим, что $p_{0e,i}, U$ зависят только от координаты x^1 . В этом случае (6.135)–(6.139) сохраняют интеграл энергии:

$$W = \int \{ \rho_0 c^2 [U_{11} (\partial_2 \varphi)^2 + U_{22} (\partial_1 \varphi)^2 + (1/4\pi) [U'_{21} (\partial_2 A)^2 + U'_{22} (\partial_1 A)^2] + \sum_{\alpha=e,i} \left(\frac{U}{\gamma} \frac{(p_U \alpha)^2}{\rho_0 \alpha} + \frac{(\partial_1 U) (p_p \alpha)}{\partial_1 \rho_0 \alpha} \right) \}.$$

$$+ \frac{U}{\gamma p_{0e}} \{ [p_e^2 - (p_e - p_{de})^2] \} dx^1 dx^2. \quad (6.140)$$

Последний член в (6.140) определяется дисперсионной частью возмущения давления электронов p_{de} , которой в дальнейшем пренебрегается. Его учет потребовался для корректного вычисления энергии возмущений. Покажем, что (6.135)–(6.139) имеют уединенные решения, бегущие со скоростью u вдоль x^2 . Возмущенные величины будем считать зависящими от x^1 и $\eta = x^2 - ut$. Тогда в стационарном случае из (6.135)–(6.139) получаем:

$$\rho_0 c d_2 \Delta_2 \varphi - (\alpha/4\pi) d_{\parallel} \Delta_2' A - \frac{\partial_1 U \partial \eta (p_e + p_i)}{u} = 0; \quad (6.141)$$

$$d_{\parallel} [(1 - u^{-1} \partial_1 p_{0e}) A - \alpha c u^{-1} (\varphi - p_e / (\epsilon n_0))] = 0; \quad (6.142)$$

$$d_2 \left[p_{Ue,i} + c \gamma p_{0e,i} \frac{\partial_1 U}{u U} \varphi \right] = 0; \quad (6.143)$$

$$d_2 \left[p_{pe,i} + c \frac{\partial_1 p_{0e,i}}{u} \varphi \right] = 0, \quad (6.144)$$

где $d_2 \equiv \partial_{\eta} - (c/u) \{ \varphi, \dots \}$.

Уравнения (6.141)–(6.144) удовлетворяются при следующих соотношениях:

$$\left. \begin{aligned} p_{Ue,i} &= - \frac{c \gamma p_{0e,i}}{u} \frac{\partial_1 U}{v} \varphi; \\ A &= \frac{\alpha c}{u} \varphi; \\ p_{pe,i} &= c \frac{\partial_1 p_{0e,i}}{u} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.145)$$

Подставляя (6.145) в (6.141), приходим к уравнению

$$\partial_z^2 (\varphi - \lambda^2 \Delta_{\perp} \varphi) + \frac{c \lambda^2}{u l_1^{1/2}} \{ \varphi, \Delta_{\perp} \varphi \} = 0, \quad (6.146)$$

где $\lambda^2 = u^2 / \Gamma^2$; Γ определено (1.61); $\Delta_{\perp} \equiv \partial_z^2 + \partial_z^2$.

В (6.146) совершено преобразование подобия:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= \left[U_{22} \left(1 - \frac{\alpha^2 c^2 A_2}{u^2} \right) \right]^{1/2} z^1 = l^{1/2} z^1; \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (6.147)$$

$$x^2 = \left[U_{11} \left(1 - \frac{a^2 c_{A1}^2}{u^2} \right) \right]^{1/2} z^2 = l_1^{1/2} z^2.$$

Величины $c_{A1} \equiv (U'_{11}/(4\pi\rho_0 U_{11}'))^{1/2}$ и $c_{A2} = (U'_{22}/(4\pi\rho_0 U_{22}'))^{1/2}$ аналогичны альфвеновской скорости в прямом магнитном поле. Уравнение (6.146) имеет решение ЛР в виде суперпозиции и ядра произвольной амплитуды (см. § 5.6). При этом необходимо выполнение условия экранировки $\lambda^2 > 0$. Это условие совпадает с критерием развития желобковой неустойчивости (1.41) $\Gamma^2 > 0$.

Преобразование подобия (6.147) неявно предполагало, что скорость вихрей удовлетворяет условию $u^2 > \max(a^2 c_{A1}^2, a^2 c_{A2}^2)$, т.е. $l_1 > 0, l_2 > 0$. Однако система (6.135)–(6.139) имеет уединенные решения и в случае $u^2 < \min(a^2 c_{A1}^2, a^2 c_{A2}^2)$. Чтобы показать это, вместо (6.147) сделаем преобразование $x^1 = (-l_1)^{1/2} z^1, x^2 = (-l_2)^{1/2} z^2$. Тогда система (6.135)–(6.139) сведется к нелинейному уравнению вида (6.146), но с противоположным знаком при коэффициенте λ^2 . Для того чтобы существовало уединенное решение и в этом случае, необходимо, чтобы $\Gamma^2 < 0$.

С учетом (6.145) выражение для энергии вихревых трубок (6.140) запишется в виде

$$W = \rho_0 c^2 \int \left[U_{11} \left(1 + \frac{a^2 c_{A1}^2}{u^2} \right) (\partial_2 \varphi)^2 + U_{22} \left(1 + \frac{a^2 c_{A2}^2}{u^2} \right) (\partial_1 \varphi)^2 - \lambda^{-2} \varphi^2 \right] dx^1 dx^2. \quad (6.148)$$

Видно, что при $\Gamma^2 > 0$, т.е. при наличии желобковой неустойчивости, энергия вихревых трубок может стать отрицательной. Таким свойством обладают лишь достаточно большие вихри. Характерный их размер должен превышать величину $d_{кр} = \max \{ [U_{11}(u^2 + a^2 c_{A1}^2)/\Gamma^2]^{1/2}, [U_{22}(u^2 + a^2 c_{A2}^2)/\Gamma^2]^{1/2} \}$.

Описанные выше эффекты могут иметь место в магнитосферной плазме [6.21]. В целом она устойчива относительно генераций желобковых и баллонных мод. Однако во время мощных нестационарных процессов, создающих большие градиенты давления, в ней могут возникнуть условия для самопроизвольного зарождения вихревых трубок. Отметим, что в этих процессах важную роль играют эффекты сжимаемости плазмы в кривом магнитном поле. Без их учета плазма оказывается всегда неустойчивой в ловушках с магнитным полем, уменьшающимся к периферии. Поэтому моделирование кривизны с помощью силы тяжести не позволяет корректно описать поведение плазмы в магнитосфере.

6.11. ВИХРЕВАЯ КОНВЕКЦИЯ И АНОМАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В ПЛАЗМЕ

При наличии неустойчивости относительно раскачки дрейфовых потенциальных и желобково-альфвеновских волн, по-видимому, вся неустойчивая область покрывается вихрями, рассмотренными в предыдущих разделах. Из-за самолокализации они слабо коррелируют друг с другом и поэтому распределены случайным образом. Наглядная картина подобной вихревой турбулентности в разрезе наблюдается на быстро вращающейся мелкой воде [5.22, 5.24]. Видно, как частицы испытывают случайные блуждания, проходя между вихрями. В центральной части вихря кружатся захваченные частицы, которые также вносят вклад в конвекцию. Сами вихри при взаимодействиях перемещаются по случайным траекториям.

В линейном приближении плазма может быть устойчивой относительно раскачки дрейфовых волн из-за стабилизации широм, эффекта конечного ларморовского радиуса ионов и др. Но если в такой плазме временно действуют сильные возмущения, например инжекция нейтронов, ВЧ-нагрев и другие, то после выключения возмущений могут остаться вихри типа рассмотренных выше. Они не чувствительны к шире и другим стабилизирующим эффектам и могут подпитываться за счет диссипативной неустойчивости. Например, известно, что после интенсивного ВЧ-нагрева не наблюдаются повышенная теплопроводность и диффузия плазмы [4.1]. В [6.22] показано, что нагревающая электромагнитная волна неустойчива относительно распада на электромагнитную и дрейфово-альфвеновскую волны. Темп распада ВЧ-волны может пересилить влияние упомянутых выше стабилизирующих факторов. В результате действия нелинейности из раскачивающихся дрейфово-альфвеновских волн в области неблагоприятного магнитного дрейфа могут образоваться двумерные желобково-дрейфовые вихри. Согласно [6.22] инкремент распадной неустойчивости по порядку равен

$$\gamma \approx \frac{\nu_0}{r_s(kL_p)^{1/2}}; \quad \nu_0 = \frac{eE\delta}{m_e\omega_0}, \quad (6.149)$$

где L_p — характерный размер неоднородности плазмы; ν_0 — скорость осцилляций электронов в поле нагревающей волны. При существующих мощностях нагрева инкремент (6.149) превышает дрейфовую частоту, поэтому неустойчивость может носить аperiодический характер, что сильно ослабляет стабилизирующее влияние шира. В результате из раскачиваемых дрейфово-альфвеновских волн с ростом их амплитуды образуются желобково-альфвеновские вихри. Их поперечный размер порядка $a \sim r_s L_s / L_p$, где L_s — характерный размер шира (вихри большего размера затухают по механизму Ландау на ионах), а скорость их перемещения поперек \mathbf{B}_0 равна скорости ларморовского дрейфа электронов. Характерная скорость вращения плазмы в вихре также порядка u_e . Для

перемешивания пролетных частиц существенно, что вихри из-за шири не параллельны друг другу. В плотной упаковке таких вихрей характерный размер перемешивания порядка L^2/L_s , где L — характерный размер упаковки, приблизительно равный размеру области неустойчивости. Отсюда получаем оценку конвективного коэффициента теплопроводности:

$$\chi \sim u_e L^2 / L_s = D_B L^2 / (L_p L_s), \quad (6.150)$$

где $D_B = \nu_{Ti} r_s$ — коэффициент боровской диффузии. Размер L остается в теории неопределенным. Можно только утверждать, что $L \ll L_p$. Поэтому коэффициент конвективной теплопроводности всегда меньше боровского, так как $L_s \gg L_p$. Наблюдаемая в экспериментах повышенная теплопроводность, возможно, объясняется образованием скоплений таких вихрей, что приводит к конвективному перемешиванию плазмы с большим характерным размером.

В экспериментах с разрядами было замечено, что когда токовая скорость превышает некоторое пороговое значение, в плазме возникает дополнительное электрическое сопротивление — так называемое аномальное. При этом оно может быть много большим классического значения, возникающего вследствие обычных кулоновских столкновений. Ток в плазме может переноситься за счет ускорения хвостовых электронов, частота столкновений которых много меньше частоты столкновений тепловых электронов. При этом могут образоваться убегающие электроны, не испытывающие кулоновских столкновений [6.23]. Г.И. Будкер [6.24] предложил использовать этот эффект для создания интенсивных релятивистских пучков в тороидальной плазме. Такие эксперименты широко проводились в конце 50-х годов во многих лабораториях мира. Эти установки получили название плазменных бетатронов. Однако уже в первой серии экспериментов было обнаружено, что даже при создании достаточно сильных электрических полей образования интенсивных пучков убегающих электронов не происходит. Вместо этого в плазме возникали мощные колебания. В [6.25, 6.26] это явление было объяснено появлением дополнительного трения, обусловленного рассеянием убегающих электронов вследствие генерации нижнегибридных колебаний.

Другой механизм образования тока — это движение электронного газа как целого относительно ионов. Однако и здесь при достижении токовой скорости u порядка ν_{Ti} возникает аномальное сопротивление, препятствующее дальнейшему росту u . В [6.27, 6.28] это объяснялось раскачкой электронным током ионно-звуковых колебаний. Такой механизм, как известно, возможен только в сильно неизоэотермической плазме, когда $T_e \gg T_i$. Однако аномальное сопротивление наблюдается в ряде случаев и при $T_e \simeq T_i$, когда раскачка ионного звука невозможна из-за сильного затухания Ландау на ионах. Это явление объяснялось в [6.30] раскачкой током первой гармоники потенциальной ионно-циклотронной волны, в которой $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$. Однако косвенным указанием на недостаточную

эффективность торможения электронов ионно-циклотронными волнами является отсутствие выраженного максимума вблизи ионной циклотронной частоты в частотном спектре турбулентности, наблюдаемой в плазме в режиме аномального сопротивления [6.31]. Наблюдения показывают, что в этом спектре почти одинаково сильны частоты, меньшие ионной циклотронной частоты. Ниже рассмотрим возможность того, что на нелинейной стадии развития этой неустойчивости вследствие перекачки энергии в область малых частот образуются уединенные вихри с частотами $\omega \ll \omega_{Bi}$ как на альфвеновской, так и на ионно-звуковой ветви. При этом вихри на ионно-звуковой ветви (потенциальные вихри) в отличие от ионно-звуковых волн могут существовать и при $T_e \cong T_i$, поскольку скорость их распространения вдоль магнитного поля может быть больше ν_{Ti} . Интервал изменения скоростей вдоль магнитного поля обоих типов вихрей довольно широк и простирается до ν_{Te} . Поэтому они эффективно могут усиливаться электрическим током в области положительности производной функции распределения электронов по скоростям. В кинетических (§ 6.6) альфвеновских и в потенциальных вихрях имеется довольно сильное электрическое поле вдоль магнитного поля (вдоль z). Поэтому в них имеются частицы, захваченные в z -направлении (как ионы, так и электроны). Трение пролетных частиц о продольное электрическое поле является основным механизмом аномального сопротивления. Поскольку вихри распределены случайным образом, то электроны, пролетающие вдоль z , тормозятся так же, как и в случайном электрическом поле. Поэтому для их описания применимо квазилинейное приближение, применявшееся в [6.29] для оценки аномального сопротивления в ионно-звуковой турбулентности. Вся разница состоит в том, что случайное продольное электрическое поле в [6.29] считалось происходящим из ионно-звуковой турбулентности, а в изотермической плазме оно вызвано появлением вихревых структур. Отметим, что вихри, раскачиваемые электрическим током, могут бежать поперек магнитного поля значительно быстрее дрейфа электронов. Поэтому в проблеме аномального сопротивления в изотермической плазме ее можно считать однородной, полагая $u_e = 0$.

Глава 7

УЕДИНЕННЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ ВИХРИ

7.1. УЕДИНЕННЫЕ ВИХРИ В ИДЕАЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Выше рассматривались уединенные структуры, в которых из-за дисперсии возникал эффект экранировки. Этим достигалась высокая степень локализации (экспоненциальное убывание на бесконечности). В средах, где нет дисперсии, но имеется достаточно большое число инте-

гралов движения, также возможны уединенные решения, в которых стационарность формы связана с наличием этих интегралов. Такие решения называются топологическими солитонами. Здесь нас будут интересовать топологические солитоны в обычной и магнитной гидродинамике. Отметим, что топологические солитоны, если они бегущие, локализованы степенным образом и поэтому обладают дальностью действия друг с другом. Покоящиеся же солитоны могут быть локализованы экспоненциально и сильнее.

Хорошо известен метод, основанный на статистическом описании решений уравнений гидродинамики. Он базируется на гипотезе, согласно которой нелинейность в несжимаемых жидкостях приводит к полной хаотизации всех степеней свободы. При сильном упрощении уравнений гидродинамики Лоренц свел их всего к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим три независимых параметра [0.8] и описывающим нелинейную стадию развития конвективной неустойчивости. При значениях параметров из некоторой конечной области решения системы Лоренца становятся полностью хаотичными (стохастизируются). Тогда любая точка, движущаяся в фазовом пространстве, описывает трехмерную кривую, стремящуюся к некоторой конечной области фазового пространства, называемой стохастическим или странным аттрактором. Из аттрактора же фазовые траектории уже не выходят. Обобщение этой картины на случай бесконечного числа степеней свободы (континуума) не тривиально. Возможно в гидродинамике имеет место более сложная картина: часть степеней свободы скоррелирована друг с другом жестко в виде трехмерных топологических солитонов. А последние уже распределены случайным образом.

Начнем исследование топологических солитонов с уравнений Эйлера:

$$d_t \mathbf{v} = -\nabla p/\rho; \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7.2)$$

Ищем стационарные осесимметричные решения этой системы. Для этого в цилиндрической системе координат r, φ, z введем потенциал Стокса ψ :

$$rv_r = \partial_z \psi; \quad rv_z = -\partial_r \psi; \quad rv_\varphi = f(\psi), \quad (7.3)$$

где f — произвольная функция.

Подставляя (7.3) в (7.1), (7.2), получаем

$$\tilde{\Delta} \psi = -ff' - r^2 F'(\psi); \quad \tilde{\Delta} \equiv r \partial_r r^{-1} \partial_r + \partial_z^2; \quad (7.4)$$

$$p/\rho = F(\psi) - \psi^2/2. \quad (7.5)$$

Здесь $F(\psi)$ — произвольная функция.

Это уравнение называют уравнением Грэда—Шафранова [7.1]. Ввиду произвольности функций f, ψ оно имеет большое разнообразие ре-

шений. Для наглядности приведем простейшее из них, выражающееся в элементарных функциях.

Введем сферу радиусом a . Внутри нее выберем произвольные функции так, чтобы уравнение (7.4) свелось к виду

$$\tilde{\Delta}\psi + k_0^2 \psi = r^2 c, \quad (7.6)$$

где k_0, c — постоянные.

Решение (7.6), ограниченное в нуле, имеет вид

$$\psi = [A\varphi(R) + c/k_0^2]r^2, \quad (7.7)$$

где

$$\varphi = \frac{\sin(k_0 R)}{R^3} - \frac{k_0 \cos(k_0 R)}{R^2}, \quad R^2 = r^2 + z^2. \quad (7.8)$$

Здесь A — амплитуда солитона.

Пусть солитон локализован полностью внутри сферы радиусом a . Для того чтобы его край был гладким, необходимо положить при $R \geq a$

$$\psi(a) = 0; \quad (\partial_R \psi)_a = 0. \quad (7.9)$$

Эти условия определяют связь между константами в (7.7) в виде

$$c = -k_0^2 A\varphi(a); \quad (7.10)$$

$$\operatorname{tg}(k_0 a) = 3k_0 a / (3 - k_0^2 a^2). \quad (7.11)$$

Первые корни этого уравнения ($k_0 a$) равны 5,76; 9,1.

Это решение описывает вихрь, имеющий все три компонента скорости и покоящийся относительно среды. Тороидальный компонент завихренности $\tilde{\Delta}\psi$ на границе вихря терпит конечный скачок. Среди вихрей, текущих относительно среды, наиболее известен вихрь Хилла. Он соответствует следующему решению уравнения (7.4). Внутри сферы радиусом a положим $F = -(3u/a^2)\psi$, а вне ее $F = 0$. Тороидальный компонент скорости всюду равен нулю. Это соответствует $f = 0$. Тогда уравнение (7.4) сводится к следующему:

$$\tilde{\Delta}\psi = \begin{cases} 3ur^2/a^2; & R \leq a; \\ 0, & R > a. \end{cases} \quad (7.12)$$

Его решение имеет вид

$$\psi = \begin{cases} -\frac{3}{4}ur^2\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right), & R \leq a; \\ \frac{1}{2}ur^2\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right), & R \geq a, \end{cases} \quad (7.13)$$

где u — скорость перемещения вихря относительно среды.

Вдали от вихря $v_z = u$. Заметим, что возмущенная скорость убывает при удалении от вихря как $1/R^2$. Внутри сферы все частицы являются захваченными, т.е. перемещаются вместе с вихрем. Решение Хилла имеет два независимых параметра: скорость u и размер a . Возможно обобщение на случай наличия скорости $v_\varphi \neq 0$. При этом в решении появляется третий независимый параметр. Для его получения решение (7.6) необходимо сшить с решением (7.12) при $R \geq 0$, что определяет коэффициенты A и c :

$$A = \frac{3}{2} \frac{u}{a\varphi'(a)}; \quad c = -\frac{3}{2} \frac{k_0^2 u \varphi(a)}{\varphi'(a)}. \quad (7.14)$$

Таким образом, получили обобщение решения Хилла, в котором тороидальная скорость отлична от нуля. В нём имеется три свободных параметра: k_0 , u , a . Эксперименты с такими вихрями, проведенные группой Ю.А. Степанянца, показывают, что вихри типа Хилла устойчивы, а бегущие вихри, имеющие тороидальный компонент скорости, неустойчивы. Устойчивость таких вихрей можно исследовать методом Ляпунова (см. приложение П.2). Для этого требуется достаточно широкий набор первых интегралов движения уравнений Эйлера (7.1), (7.2). Отметим, что кроме хорошо известных интегралов энергии E , импульса P и момента M :

$$\left. \begin{aligned} E &= \int (v^2/2) d^3x; \\ P &= \int v d^3x; \\ M &= \int [\mathbf{r}, \mathbf{v}] d^3x \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

они сохраняют интеграл спиральности

$$I = \int_V \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} d^3x, \quad (7.16)$$

где V — произвольный объем внутри поверхности, на которой $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности.

7.2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Приведенные выше стационарные решения уравнений идеальной гидродинамики были получены в предположении осевой симметрии. Наряду с такими существуют и точные нестационарные решения. Естественно, что их получение представляет собой намного более сложную задачу и потому таких решений пока мало. В [7.2] были найдены довольно общие двумерные решения системы (7.1), (7.2). Для их получения удобно перейти к лагранжевым переменным. Пусть x_0, y_0 — начальные

координаты некоторой жидкой частицы. Тогда ее координаты x, y в момент времени t будут функциями x_0, y_0, t . Под действием градиента давления частицы приобретают ускорение, равное:

$$\ddot{x} = -\rho^{-1} \partial_x p; \quad p = p(x, y, t); \quad \rho = \text{const}; \quad (7.17)$$

$$\ddot{y} = -\rho^{-1} \partial_y p; \quad x = x(x_0, y_0, t); \quad y = y(x_0, y_0, t). \quad (7.18)$$

Для исключения производных по x, y из правой части умножим эти уравнения соответственно на $\partial_{x_0} x$ и $\partial_{x_0} y$ и сложим. Затем, умножая их на $\partial_{y_0} x$ и $\partial_{y_0} y$ и складывая, получаем:

$$\ddot{x} \partial_{x_0} x + \ddot{y} \partial_{x_0} y = -\rho^{-1} \partial_{x_0} p; \quad (7.19)$$

$$\ddot{x} \partial_{y_0} x + \ddot{y} \partial_{y_0} y = -\rho^{-1} \partial_{y_0} p. \quad (7.20)$$

В этой записи в отличие от (7.17), (7.18) p можно считать функцией x_0, y_0, t . Проинтегрируем эту систему от нуля до t . Тогда, например, для (7.19) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\ddot{x} \partial_{x_0} x + \ddot{y} \partial_{x_0} y) dt &= \dot{x} \partial_{x_0} x + \dot{y} \partial_{x_0} y - v_{0x} - \\ &- \frac{1}{2} \partial_{x_0} \int_0^t [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] dt = -\rho^{-1} \partial_{x_0} \int_0^t p dt, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где v_{0x} — начальное значение компонента скорости вдоль x в момент времени $t = 0$. Аналогично из (7.20) получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\ddot{x} \partial_{y_0} x + \ddot{y} \partial_{y_0} y) dt &= x \partial_{y_0} x + \dot{y} \partial_{y_0} y - v_{0y} - \\ &- \frac{1}{2} \partial_{y_0} \int_0^t [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] dt = -\rho^{-1} \partial_{y_0} \int_0^t p dt. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Продифференцируем (7.21) по y_0 , (7.22) — по x_0 и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\{x, \dot{x}\} + \{y, \dot{y}\} = -\Omega, \quad (7.23)$$

где $\{A, B\} \equiv \partial_{x_0} A \partial_{y_0} B - \partial_{x_0} B \partial_{y_0} A$; Ω — начальное значение завихренности ($\Omega \equiv \text{rot}_z v_0$).

Нетрудно показать, что условие несжимаемости (7.2) в лагранжевых переменных x_0, y_0 можно записать в виде условия сохранения элементарного объема несжимаемой жидкости:

$$\{x, y\} \equiv 1. \quad (7.24)$$

Уравнения (7.1), (7.2), таким образом, свелись к системе (7.23), (7.24). Ее можно упростить, перейдя к комплексным переменным $w = x + iy$, $\eta = x_0 + iy_0$. При этом w является не аналитической функцией, т.е. зависит как от η , так и от ее комплексно-сопряженной величины η^* . В этих переменных уравнения идеальной гидродинамики запишутся в виде

$$\{ \dot{w}, w^* \} = -\Omega; \quad \Omega = \Omega(\eta, \eta^*); \quad (7.25)$$

$$\{ w, w^* \} = 1; \quad w = w(\eta, \eta^*, t), \quad (7.26)$$

где $\{ A, B \} \equiv \partial_{\eta} A \partial_{\eta^*} B - \partial_{\eta} B \partial_{\eta^*} A$; \dot{w} – комплексная скорость.

В [7.2] найдено следующее решение таких уравнений:

$$w = G(\eta) \exp(i\lambda t) + F(\eta^*) \exp(i\mu t), \quad (7.27)$$

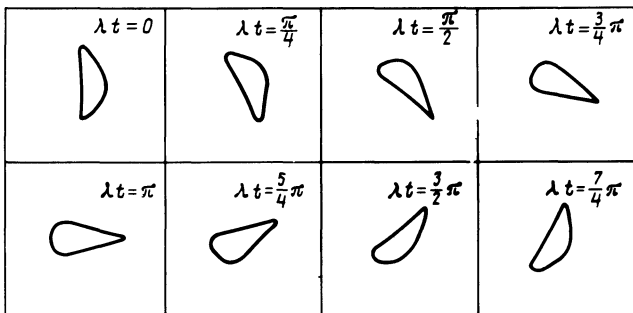
где λ, μ – произвольные действительные числа; G и F – аналитические функции, связанные условием, вытекающим из (7.26):

$$|\partial_{\eta} G|^2 + |\partial_{\eta^*} F|^2 = 1. \quad (7.28)$$

Это решение осциллирует с двумя частотами λ и μ . Можно показать, что для частиц жидкости это соответствует суперпозиции движений по двум круговым траекториям с частотами λ и μ . Согласно (7.25) завихренность Ω в этом решении

$$\Omega = 2(\lambda |\partial_{\eta} G|^2 - \mu |\partial_{\eta^*} F|^2). \quad (7.29)$$

В эйлеровых переменных как скорость, так и завихренность, соответствующие этим решениям, зависят от времени и координат сложным образом. Исследуем вопрос о том, может ли вписываться найденное решение в потенциальное поле скоростей. Последнее удобно представить в



Р и с. 7.1. Эволюция границы вихревого пятна, обтекаемого потенциальным течением

эйлеровых переменных. Зависимость комплексной скорости $\dot{w} = v_x + i v_y$ от комплексной координаты $w = x + iy$ и времени зададим в параметрической форме с помощью комплексного параметра ξ :

$$\dot{w} = i\lambda G_1(\xi^*) \exp(i\lambda t) + i\mu F_1(\xi^*) \exp(i\mu t); \quad (7.30)$$

$$w = G_1(\xi) \exp(i\lambda t) + F_1(\xi) \exp(i\mu t). \quad (7.31)$$

Нетрудно проверить, что завихренность и дивергенция в этом решении равна нулю, поскольку \dot{w} является функцией только w^* и t . Это видно из общих соотношений $\operatorname{div} v = 2 \operatorname{Re} \partial_w \dot{w}$, $\Omega = -2 \operatorname{Im} \partial_w \dot{w}$. Пусть в начальный момент времени завихренность занимала область, граница которой задана уравнением $\eta = \eta_{\text{ГР}}$ [это соответствует уравнению границы $y_0 = y_0(x_0)$]. Тогда легко видеть, что в произвольный момент времени решение (7.30), (7.31) непрерывно переходит в (7.27) при значениях $\xi = \xi_{\text{ГР}}$, определенных из уравнений

$$\left. \begin{aligned} G(\eta_{\text{ГР}}) &= G_1(\xi_{\text{ГР}}); & F(\eta_{\text{ГР}}^*) &= F_1(\xi_{\text{ГР}}); \\ G(\eta_{\text{ГР}}) &= G_1(\xi_{\text{ГР}}^*); & F(\eta_{\text{ГР}}^*) &= F_1(\xi_{\text{ГР}}^*). \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Отсюда видно, что $\xi_{\text{ГР}}$ чисто действительно. Область изменения ξ подбирается так, чтобы координаты w вихревой и потенциальной областей не перекрывались. Соотношения (7.32) определяют $F_1(\xi)$ и $G_1(\xi)$ на комплексной плоскости ξ как аналитическое продолжение функций G и F , определяемое по их значению на контуре $\xi = \xi_{\text{ГР}}$.

В качестве примера возьмем выражение вихревой области в виде

$$w = c\zeta \exp(i\lambda t) + F(\zeta^*); \quad \zeta \equiv \exp(ik\eta). \quad (7.33)$$

Пусть вихрь находится внутри единичного круга $|\zeta| = 1$. Выражение (7.33) соответствует выбору $G(\eta) = \exp(ik\eta)$ и $\mu = 0$. Потенциальное течение во внешней области этого круга запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= c\zeta \exp(i\lambda t) + F(\zeta^{-1}); \\ \dot{w} &= i\lambda c(\zeta^*)^{-1} \exp(i\lambda t). \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

При этом на бесконечности это течение совпадает с течением вокруг точечного вихря. На рис. 7.1 приводится поведение границы вихревой области в случае $F(\zeta^*) = \alpha\zeta^* + \beta(\zeta^*)^2$, где α, β — действительные параметры.

7.3. УЕДИНЕННЫЕ ВИХРИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В теоретических исследованиях по удержанию плазмы в магнитных ловушках представляют интерес решения в виде тороидальных равновесных конфигураций. В них давление плазмы имеет максимум в центре.

Поэтому, как показал В.Д. Шафранов [7.1], они не могут быть уединенными. В [7.3, 7.4] найдены решения уравнений МГД в виде уединенных тороидальных вихрей. Особую актуальность изучение тороидальных вихрей приобрело в связи с разработкой мощных квазистационарных плазмостатических и плазмодинамических ловушек, где гидродинамическое движение сосуществует с вихревым магнитным полем [7.5].

Уединенные МГД-вихри могут встречаться и в космической плазме, например в солнечном ветре, который из-за больших размеров и сравнительной однородности является удобным объектом для наблюдения альфвеновских волн. Измерения показывают, что в окрестности Земли скорость ветра $v \approx 5 \cdot 10^5$ м/с, альфвеновская скорость $c_A \approx 5 \cdot 10^4$ м/с, возмущение плотности плазмы в наблюдаемой турбулентности пренебрежимо мало, пульсации компонентов магнитного поля порядка среднего поля, а пульсации скорости плазмы — порядка c_A [7.6–7.8]. Это указывает на то, что в солнечном ветре имеется сильная альфвеновская турбулентность. Наблюдения свидетельствуют о наличии инерционного интервала в области волновых чисел $k > k_0 \approx 10^{-8}$ м⁻¹, где энергетический спектр турбулентности имеет степенной вид $W_k \sim k^{-1.6}$. Применение метода размерности Колмогорова к альфвеновской турбулентности требует предварительного допущения, что энергетический спектр изотропен. В [7.9] при этом предположении показано, что спектр альфвеновской турбулентности $W_k \sim k^{-1.5}$. Поскольку частотный спектр альфвеновских волн сильно анизотропный, предположение изотропности турбулентности требует обоснования. Кроме того, остается открытым вопрос о причине слабой зависимости W_k от k при $k < k_0$. Ниже покажем, что альфвеновская турбулентность может состоять из структур в виде тороидальных солитонов, бегущих вдоль магнитного поля со скоростью Альфвена. Часть магнитных поверхностей в таком солитоне может быть замкнута и иметь вид тороидов, что придает солитону топологическую устойчивость. Тогда $1/k_0$ имеет смысл размера самых больших солитонов в турбулентности. В солитоне размером $1/k_0$ в интервале волновых чисел $k < k_0$ энергетический спектр почти постоянный, а при $k > k_0$ быстро спадает. Быстрый спад спектра наблюдаемой турбулентности при $k > k_0$ можно объяснить наличием хаотического набора солитонов размером меньше $1/k_0$, распределенных по размерам и амплитудам случайным образом. Изотропность турбулентности получается как следствие приближительной изотропности спектра солитона. Солитоны близких размеров сильно взаимодействуют друг с другом. Столкновения солитонов создают поток энергии Γ_k в сторону больших k . Поскольку солитоны чисто топологические и не зависят от выделенного размера или частоты, то этот поток при $k > k_0$ не может сильно отличаться от турбулентного потока, найденного Крайчаном [7.9]. Малое различие наблюдаемого и теоретического спектров [7.6, 7.7] при $k > k_0$ может объяснить дополнительным поглощением, введенным в [7.10].

Как будет видно из дальнейшего, МГД-вихри, если они бегут со скоростью Альфвена во внешнем магнитном поле, локализованы полностью. Если же они бегут со скоростью, отличной от альфвеновской, то могут быть локализованы степенным образом. Как в обычной гидродинамике, и здесь МГД-вихри могут иметь только полоидальный компонент или все три компонента скорости и магнитного поля. Возмущения магнитного поля и скорости параллельны друг другу, как в альфвеновской волне, кроме специально отмеченных случаев. Поэтому такие вихри можно называть альфвеновскими. При этом сжимаемость плазмы незначительна.

Исходим из уравнений идеальной магнитной гидродинамики в предположении несжимаемой плазмы:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (7.35)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] - [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{B}] / (4\pi\rho) = -\nabla(p/\rho + v^2/2); \quad (7.36)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (7.37)$$

Найдем простейшее аналитическое выражение для тороидального солитона. Ищем решение, бегущее со скоростью Альфвена. Пусть магнитное поле состоит из постоянной части \mathbf{B}_0 и солитонной \mathbf{B}_1 . Тогда в системе отсчета, бегущей вдоль \mathbf{B}_0 со скоростью $c_A = \mathbf{B}_0 / (4\pi\rho)^{1/2}$, из (7.36) получаем

$$p + \rho v^2/2 = \text{const}, \quad (7.38)$$

где $\mathbf{v} = c_A \mathbf{e} + \mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{B}_1 / (4\pi\rho)^{1/2}$.

Введем потенциал Стокса ψ

$$r\mathbf{B}_1 = [\mathbf{e}, \nabla \psi] + k_0 \psi, \quad (7.39)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор в азимутальном направлении в цилиндрической системе координат; k_0 — произвольная константа, пропорциональная тороидальному компоненту магнитного поля. Потребуем, чтобы солитон состоял из тороидальных поверхностей $\psi = \text{const}$. Это приводит к условию

$$[\mathbf{B}_1, \operatorname{rot} \mathbf{B}_1] = c \nabla \psi, \quad (7.40)$$

где c — произвольная константа.

Подставляя (7.39) в (7.40) и интегрируя, получаем уравнение, ранее полученное в обычной гидродинамике (7.6). Отсюда получаем, что альфвеновские вихри, бегущие со скоростью c_A , тождественны уединенным вихрям, покоящимся относительно среды в обычной гидродинамике.

Рассмотрим более широкий класс тороидальных альфвеновских солитонов, вид которых можно установить численными методами. Для этого магнитное поле солитона выразим через потенциал Стокса следу-

ющим соотношением:

$$r\mathbf{B}_1 = [\mathbf{e}, \nabla\psi] + e f(\psi), \quad (7.41)$$

где $f(\psi)$ — произвольная функция ψ .

Условие существования магнитных поверхностей представим в виде

$$[\mathbf{B}_1, \text{rot}\mathbf{B}_1] = \nabla F(\psi), \quad (7.42)$$

где $F(\psi)$ — произвольная функция.

Подставляя (7.41) в (7.42), получаем уравнение Грэда—Шафранова (7.4).

Как показано в [7.3], уравнение (7.4) имеет уединенные гладкие решения, если оно сводится к виду

$$\tilde{\Delta}\psi = A^2 r^2 \psi - B\psi^n, \quad \tilde{\Delta} \equiv r\partial_r r^{-1}\partial_r + \partial_z^2, \quad (7.43)$$

где n — целое число, характеризующее степень нелинейности; A и B — константы, определяющие амплитуду и размер солитона.

При $n = 2$ завихренность в торе наиболее компактна (завихренность приближается к оси z). С ростом n завихренность отходит от оси z и при нечетных n возможны нечетные по z решения. Наиболее компактным из антисимметричных решений будет решение при $n = 3$.

Уравнение (7.43) преобразованием подобия приводится к следующему безразмерному виду:

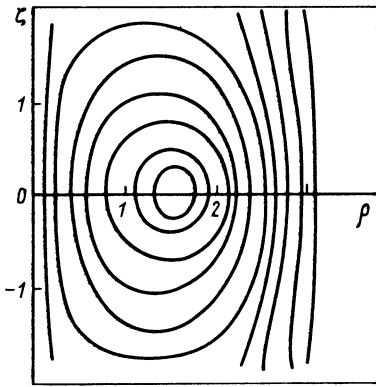
$$\Delta^*\varphi = \rho^2\varphi - \varphi^n, \quad \Delta^*\varphi = \rho\partial_\rho - \rho^{-1}\partial_\rho + \partial_\xi^2, \quad (7.44)$$

где $\rho = A^{1/2}r$; $\xi = A^{1/2}z$; $\varphi = (B/A)^{1/(n-1)}\psi$.

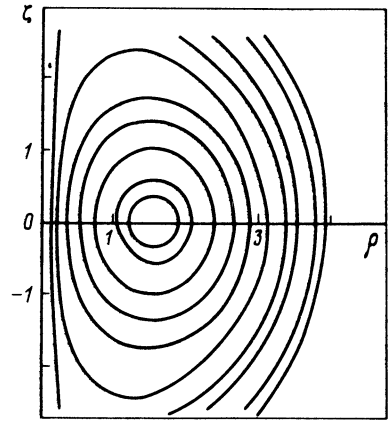
Рельеф решения уравнения (7.44) при $n = 2$ и $n = 3$ изображен на рис. 7.2, 7.3. На рис. 7.4, 7.5 приведен рельеф тороидального компонента тока, пропорционального $\tilde{\Delta}\psi$. Видно, что при $n = 3$ ток отходит от оси симметрии.

Точно такие же решения имеются и для случая покоящихся вихрей, где скорость плазмы равна нулю всюду, а магнитное поле дается формулой (7.39) или (7.41).

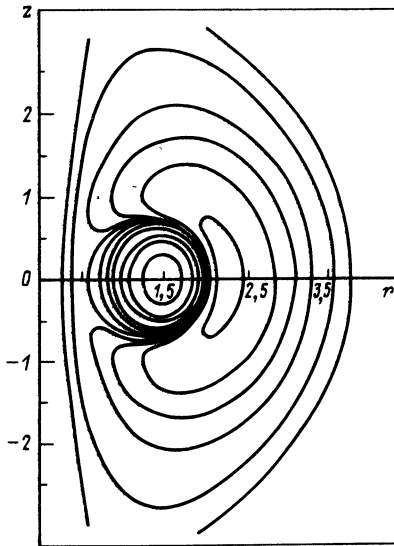
При наличии хаотического набора рассмотренных выше солитонов возможно образование турбулентности, создающей поток энергии в сторону больших волновых чисел. Заметим, что если турбулентность образована альфвеновскими тороидальными солитонами, рассмотренными выше, то она должна быть почти изотропна. Кроме того, в [7.10] отмечалось, что при образовании на гребнях волн разрывов производных появляется эффект прямого затухания гармоник за счет поглощения их энергии на разрывах. Это имеет место, например, в акустической турбулентности и турбулентности гравитационных волн на поверхности океана. Появление разрывов означает, что имеет место корреляция по фазам между гармониками с разными волновыми числами. Такая же кор-



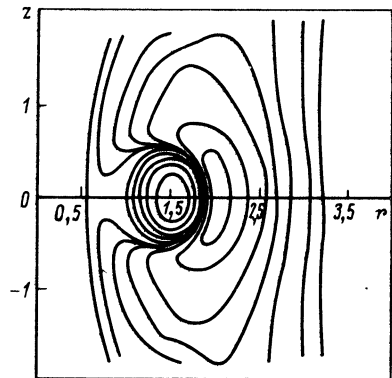
Р и с. 7.2. Рельеф потенциала Стокса φ солитонного решения уравнения (7.44) с квадратической нелинейностью (максимальное значение достигается при $\rho = 1,6$ и равно 3,8)



Р и с. 7.3. Рельеф потенциала Стокса φ солитонного решения уравнения (7.44) с кубической нелинейностью (максимальное значение достигается при $\rho = 1,5$ и равно 3,3)



Р и с. 7.4. Рельеф тороидального компонента завихренности (электрического тока) в уравнении (7.44) при $n = 2$ (минимальное значение достигается при $\rho = 1,5$ и равно $-2,9$, максимальное – при $\rho = 2,3$ и равно 1,9)



Р и с. 7.5. Рельеф тороидального компонента завихренности (электрического тока) для уравнения (7.44) при $n = 3$ (минимальное значение достигается при $\rho = 1,5$ и равно $-4,3$, максимальное – при $\rho = 2,0$ и равно 6,1)

реляция может существовать и в средах, где возможны устойчивые структуры в виде солитонов или уединенных вихрей. Этот эффект можно учесть введением дополнительного члена в уравнение переноса энергии по спектру аналогично тому, как это было сделано в [7.4]:

$$\partial_t W_k + \partial_k \Gamma_k = -\alpha \Gamma_k / k, \quad (7.45)$$

где W_k — спектральная плотность энергии; Γ_k — поток энергии по спектру; α — константа.

Правая часть в уравнении (7.45) введена в [7.10] из соображений размерности для случая звуковой турбулентности. В нашем случае она описывает эффект корреляции по фазам между гармониками с разными волновыми числами в солитонах с разрывом завихренности.

Выражение для Γ_k определяем из уравнений (7.35) — (7.37) из размерных соображений: $\Gamma_k \propto k \omega_k W_k$, где ω_k — характерная частота перекачки, которую можно оценить, исходя из уравнений (7.35), (7.36). Из них получаем $\omega_k \propto k^2 W_k / c_A$. В колмогоровской турбулентности $\Gamma_k = \text{const}$. В солитонной турбулентности в стационарном случае $\partial_t W_k = 0$. Поэтому из (7.45) имеем $k^\alpha \Gamma_k = \text{const}$. Отсюда $W_k \propto k^{-(3+\alpha)/2}$. Для нахождения параметра α необходимо знание характера взаимодействия солитонов, что представляет сложную задачу. Поэтому так же, как и в [7.10], воспользуемся данными эксперимента. Согласно измерениям в солнечном ветре [7.6 — 7.8] на уровне орбиты Земли имеем $W_k \propto k^{-\sigma}$ ($\sigma = 1,5 \div 1,6$), откуда заключаем, что для альфвеновской турбулентности $\alpha = 0 \div 0,2$.

7.4. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В ряде случаев движением ионов в колебаниях плазмы можно пренебречь. Это, в частности, имеет место при распространении электромагнитных волн с частотой, большей ионной циклотронной частоты, и длиной волны, меньшей c/ω_{pi} . Тогда ионы служат фоном, обеспечивающим квазинейтральность плазмы.

Уравнения движения электронов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_e d_t \mathbf{v} &= -e\mathbf{E} - \nabla p - (e/c)[\mathbf{v}, \mathbf{B}]; \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Выразим электрическое и магнитное поля через скалярный и векторный потенциалы φ , \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (1/c) \partial_t \mathbf{A}; \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Тогда, беря rot от (7.46) и вводя обобщенный импульс $\mathbf{P} = m_e \mathbf{v} - (e/c) \mathbf{A}$, получаем:

$$\partial_t \text{rot} \mathbf{P} = \text{rot} [\mathbf{v}, \text{rot} \mathbf{P}]. \quad (7.47)$$

Из (7.47) видно, что обобщенный импульс в заморожен в электронную жидкость. В дальнейшем рассмотрим случай достаточно плотной плазмы $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$ и ограничимся областью частот $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{pe}$. При этом током смещения можно пренебречь, а уравнение Максвелла запишется в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \simeq - \frac{4\pi en}{c} \mathbf{v}. \quad (7.48)$$

Здесь считается, что вклад ионов в электрический ток пренебрежимо мал. Плотность частиц плазмы будем считать постоянной. Ее изменение вызвано в основном эффектом ВЧ-давления. Однако этот эффект, как известно, появляется в кубическом по амплитуде возмущений приближении. Здесь же будут рассмотрены нелинейные эффекты, квадратичные по амплитуде. Поэтому возмущением плотности в дальнейшем будем пренебрегать. С помощью (7.48) исключаем скорость \mathbf{v} из (7.47). Это приводит к основному уравнению электронной гидродинамики:

$$\partial_t \Omega = [e/(m_e c)] r_0^2 \text{rot}[\Omega, \text{rot } \mathbf{B}]; \quad \Omega \equiv \mathbf{B} - r_0^2 \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (7.49)$$

где $r_0 = c/\omega_{pe}$ — скин-длина. Если ввести характерную величину магнитного поля B_0 , то (7.49) можно записать в безразмерном виде:

$$\partial_t \mathbf{q} = \text{rot}[\mathbf{q}, \text{rot } \mathbf{H}]; \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}. \quad (7.50)$$

Здесь $\mathbf{H} = \mathbf{B}/B_0$; время измеряется в единицах $m_e c/(eB_0)$, координаты — в единицах r_0 .

Это уравнение сохраняет интегралы энергии, импульса и момента импульса в виде:

$$\left. \begin{aligned} W &= (1/2) \int \mathbf{H} \mathbf{q} d^3x; \\ \mathbf{P} &= (1/2) \int [\mathbf{r}, \mathbf{q}] d^3x; \\ \mathbf{M} &= (1/3) \int [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{q}]] d^3x. \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

Оно сохраняет и потоки \mathbf{q} через произвольный замкнутый жидкий контур.

Представляет интерес обобщение понятия спиральности на электронную гидродинамику. Это можно сделать, если ввести вектор \mathbf{Q} — аналог вектор-потенциала магнитного поля \mathbf{A} — и электронную спиральность s — аналог МГД-спиральности. Пусть $\mathbf{q} = \text{rot } \mathbf{Q}$, а $s = \mathbf{Q} \mathbf{q}$. Тогда из (7.50) имеем:

$$\partial_t \mathbf{Q} = [\mathbf{v}, \mathbf{q}] + \nabla \psi, \quad (7.52)$$

где ψ — произвольная функция. Выбор ψ определяет калибровку \mathbf{Q} . Введем следующую калибровку:

$$\psi = -\mathbf{Q} \mathbf{v}. \quad (7.53)$$

Тогда из (7.50), (7.52) и (7.53) имеем:

$$\partial_t s + \operatorname{div}(sv) = 0. \quad (7.54)$$

Это уравнение показывает, что электронная спиральность сохраняется локально в каждой точке. Следствием этого уравнения являются новые сохраняющиеся интегралы. С учетом того, что в электронной гидродинамике $\operatorname{div} v = 0$, получаем, что

$$I = \int_D f(s) d^3x \quad (7.55)$$

является сохраняющейся величиной. Здесь f — произвольная функция, D — произвольный жидкий объем, точки которого перемещаются со скоростью v . Этот интеграл можно использовать для доказательства устойчивости электронных структур методом Ляпунова. В линейном приближении (7.50) описывает распространение геликонов с дисперсионным уравнением

$$\omega = \pm k(kH_0)/(1+k^2). \quad (7.56)$$

Эти волны часто наблюдаются в магнитосфере Земли, где они генерируются в результате развития циклотронной неустойчивости. Они возникают и в результате электрических разрядов в атмосфере [7.11]. В этом случае их называют вистлерами или свистящими атмосфериками. Геликоны наблюдаются и в полупроводниковой плазме [7.12]. В пределе больших волновых чисел геликоны переходят в электронную циклотронную волну с частотой, стремящейся к ω_{Be} .

7.5. ТОРОИДАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ВИХРИ

Покажем, что вдоль оси постоянного винтового магнитного поля волновой пакет геликонов может распространяться в виде тороидального вихря, локализованного экспоненциально [7.13, 7.14]. При этом решение слабо зависит от шага винта, который может находиться в интервале от нуля (случай z -пинча) до бесконечности (прямое поле). Ищем решение (7.50) в виде $H = H(r, z - ut)$, r — радиальная координата в цилиндрической системе. Тогда из (7.50) получаем

$$[q, \operatorname{rot} H + u e_z] = \nabla \Phi, \quad (7.57)$$

где Φ — произвольная функция, а e_z — единичный вектор вдоль магнитного поля. Выразим H через потенциалы ψ и f — аналогично (7.41). Тогда из (7.57) имеем

$$\tilde{\Delta} \psi - \psi = F; \quad F = F(\tilde{f}); \quad (7.58)$$

$$\tilde{\Delta} f - f + F' \psi = -FF' + r^2 \Phi', \quad (7.59)$$

где F и Φ — произвольные функции $\tilde{f} \equiv f + ur^2/2$.

Введем сферу радиусом $R = R_0$, где $R^2 = r^2 + (z - ut)^2$. Вне сферы положим $F = bf$, $\Phi' = a$. Тогда в области $R > R_0$ имеем

$$\tilde{\Delta}\psi - \psi = b(f + ur^2/2); \quad (7.60)$$

$$\tilde{\Delta}f - f + b\psi = -b^2f + r^2(a - ub^2/2). \quad (7.61)$$

Эта система уравнений имеет решения вида

$$\psi = \left[\frac{A\chi(\kappa_1 R)}{\kappa_1^2 - 1} + \frac{A^*\chi(\kappa_2 R)}{\kappa_2^2 - 1} \right] br^2 - b(u/2 - a)r^2; \quad (7.62)$$

$$f = [A\chi(\kappa_1 R) + A^*\chi(\kappa_2 R)]r^2 - ar^2. \quad (7.63)$$

Здесь $\chi(x) = x^{-3/2}K_{3/2}(x)$; $K_{3/2}$ — функция Макдональда; $\kappa_{1,2}$ — корни дисперсионного уравнения

$$(\kappa^2 + b^2/2 - 1)^2 = b^2(b^2/4 - 1), \quad (7.64)$$

которое получается при подстановке решений (7.62), (7.63) в (7.60), (7.61). Они имеют вид

$$\kappa_{1,2}^2 = 1 - b^2/2 \pm (b^4/4 - b^2)^{1/2}. \quad (7.65)$$

Чтобы χ исчезало на бесконечности, необходимо наличие у корней (7.65) действительной части. Это достигается только при $b^2 < 4$. Тогда при $R \rightarrow \infty$ имеем $\psi \rightarrow b(a - u/2)r^2$, $f \rightarrow -ar^2$. Это значит, что магнитное поле вдали от вихря имеет компоненты

$$H_{0z} = (u - 2a)b; \quad H_{0\varphi} = -ar. \quad (7.66)$$

При этом имеется эффективное радиальное электрическое поле, равное $E_r = -\partial_r\Phi = a(u - 2a)$ (в единицах B_0). Внутри сферы F и Φ выберем таким образом, чтобы уравнения (7.58), (7.59) приняли вид

$$\tilde{\Delta}\psi - \psi = c(f + ur^2/2); \quad (7.67)$$

$$\tilde{\Delta}f - f + c^2\psi = -c^2f + r^2(d - c^2u/2), \quad (7.68)$$

где c и d — постоянные.

Эта система имеет следующие решения:

$$\psi = -c \left[\frac{D_1}{k_1^2 + 1} \frac{j_1(k_1 R)}{R} + \frac{D_2}{k_2^2 + 1} \frac{j_1(k_2 R)}{R} + \frac{u}{2} - d \right] r^2; \quad (7.69)$$

$$f = [D_1 j_1(k_1 R) + D_2 j_1(k_2 R) - Rd](r^2/R), \quad (7.70)$$

где

$$k_{1,2}^2 = -1 + c^2/2 \pm (c^4/4 - c^2)^{1/2} \quad (7.71)$$

— корни дисперсионного уравнения; $j_1(\xi)$ — сферическая функция Бесселя первого рода. Эти решения внутри и вне сферы необходимо сшить на границе $R = R_0$ при следующих условиях; $\tilde{f} = f + ur^2/2 = 0$, непрерывность ψ , f , $\nabla\psi$, ∇f . При этом магнитное поле и скорость электронов непрерывны на границе, а z -компонент завихренности скорости $\tilde{\Delta}f/r$ претерпевает скачок.

В постоянном магнитном поле с $H_{0\varphi} = 0$ эти решения были получены в [7.14]. В [7.13] они были исследованы для случая $H_{0z} = 0$ в поле постоянного тока $j_{0z} = \text{const}$. Это решение интересно тем, что оно может реализоваться в центральной части z -пинча, где нет продольного магнитного поля. Они, возможно, наблюдались в виде светящихся точек на конечной стадии мощных электрических разрядов в z -пинчах [7.15]. На этой стадии в разряде появляется много тяжелых примесей, которые дают излучение в рентгеновском диапазоне частот. Во многих работах отмечалось, что это излучение выходит не из всего объема, а из отдельных участков очень малых размеров (порядка r_0). Чтобы объяснить такое излучение в предположении, что плазма находится в термодинамическом равновесии, приходится допускать, что плотность частиц в светящихся точках на несколько порядков больше плотности твердого тела. Другое объяснение этого явления состоит в следующем. В результате неустойчивости в плазме образуются упомянутые тороидальные вихри размером порядка r_0 . Захваченные в таких вихрях электроны далеки от термодинамического равновесия. Возможно, что при усилении или затухании такого вихря, сопровождающегося появлением компонента электрического поля вдоль \mathbf{B} , происходит образование убегающих электронов с энергиями, намного превышающими энергию фоновых электронов. Легко видеть, что наличие малого количества таких электронов при столкновениях с тяжелыми примесями может привести к появлению рентгеновского излучения такой же интенсивности, как и в случае плазмы большой плотности с максвелловским распределением по скоростям.

Заметим, что при $B_{0z} = 0$ скорость распространения вихря совпадает с невозмущенной токовой скоростью электронов, т.е. в этом случае вихрь покоится относительно фоновых электронов. Чтобы в таких условиях уравнение электронной гидродинамики (7.50) было применимо, необходимо, чтобы тепловая скорость электронов была много меньше токовой скорости в вихре.

7.6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В СРЕДАХ С ПОСТОЯННОЙ НАМАГНИЧЕННОСТЬЮ

В веществах, которые характеризуются постоянным вектором намагниченности \mathbf{M} (т.е. в ферромагнетиках и антиферромагнетиках) возможны своеобразные волны. В них \mathbf{M} колеблется без изменения значения.

В общем случае ротор и дивергенция этого вектора отличны от нуля. Уравнение этих волн было получено Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [0.14]. В простейшем случае оно имеет вид:

$$\partial_t \mathbf{m} = -[\mathbf{m}, \Omega] - \gamma[\mathbf{m}, [\mathbf{m}, \Omega]]; \quad (7.72)$$

$$\Omega = \omega_H + \delta E / \delta \mathbf{m}. \quad (7.73)$$

Здесь \mathbf{m} — единичный вектор, параллельный \mathbf{M} ; ω_H — вектор спиновой магнитной частоты в постоянном магнитном поле с напряженностью \mathbf{H} ; E — энергия вещества; γ — постоянная релаксации. Единичный вектор \mathbf{m} можно выразить через две функции, θ и φ , от времени и координат по формулам:

$$m_x = \sin \theta \cdot \cos \varphi; \quad m_y = \sin \theta \cdot \sin \varphi; \quad m_z = \cos \theta. \quad (7.74)$$

Рассмотрим одноосные кристаллы и направим ось z вдоль направления анизотропии. В этом сравнительно простом случае

$$E = (\omega_0/2) \int w d^3x, \quad (7.75)$$

где

$$w = l^2 [(\nabla \theta)^2 + (\nabla \varphi)^2 \sin^2 \theta] + b \sin^2 \theta. \quad (7.76)$$

Здесь ω_0 , l , b — постоянные; ω_0 — частота однородного ферромагнитного резонанса; l — магнитная длина; b — постоянная анизотропии. Если b положительна, то минимальной энергии соответствует состояние, в котором \mathbf{m} всюду направлен вдоль z . В этом случае говорят, что имеется анизотропия типа оси легкого намагничивания. При $b < 0$ имеем анизотропию типа плоскости легкого намагничивания.

Если в (7.72) нет диссипации ($\gamma = 0$), то легко видеть, что E является сохраняющейся величиной. Кроме нее сохраняются импульс поля, проекция магнитного момента на ось z и момент импульса:

$$\mathbf{P} = \int (1 - \cos \theta) \nabla \varphi d^3x; \quad (7.77)$$

$$N = \int (1 - \cos \theta) d^3x; \quad (7.78)$$

$$\mathbf{K} = \int (1 - \cos \theta) [\mathbf{r}, \nabla \varphi] d^3x. \quad (7.79)$$

В переменных (7.74) уравнение (7.72) с учетом (7.73), (7.75) принимает вид (для простоты считаем, что $\gamma = 0$ и ω_H направлен вдоль z):

$$\omega_0^{-1} (\partial_t \varphi - \omega_H) \sin \theta + l^2 \nabla^2 \theta = [b + l^2 (\nabla \varphi)^2] \sin \theta \cdot \cos \theta; \quad (7.80)$$

$$\omega_0^{-1} \partial_t \theta \sin \theta = l^2 \operatorname{div}(\sin^2 \theta \cdot \nabla \varphi). \quad (7.81)$$

В линейном приближении система (7.80), (7.81) описывает спиновые

волны с дисперсионным уравнением:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_H + \omega_0 l^2 k^2; \\ \theta &= \text{const}; \varphi = \omega t - \mathbf{kr}. \end{aligned} \right\} \quad (7.82)$$

Рассмотрим простейшие солитонные решения уравнений (7.80), (7.81). Особый интерес представляют решения, которые не зависят от времени, поскольку согласно (7.72) они не затухают и при наличии диссипации. При $\partial_t = 0$ из (7.72), (7.73) следует $\Omega = 0$, что является необходимым условием минимума энергии и устойчивости. Это условие в переменных θ, φ получается из (7.80), (7.81) при $\partial_t = 0$.

Большую роль в физике ферромагнетиков играют решения, зависящие только от одной координаты поперек оси анизотропии ($\theta = 0$). При этом (7.80) переходит в уравнение \sin -Гордон. В [7.16] показана полная интегрируемость этого уравнения.

Если положить $\varphi = \text{const}$, $\theta = \theta(x)$, то из (7.80), (7.81) получим уравнение стационарной одномерной волны:

$$l^2 \partial_x^2 \theta = (\omega_H / \omega_0 + b \cos \theta) \sin \theta. \quad (7.83)$$

Если нет внешнего магнитного поля ($\omega_H = 0$), то уединенное решение (7.83) находится аналитически и имеет вид:

$$\cos \theta = \text{th}(x \sqrt{b}/l). \quad (7.84)$$

В этом решении происходит полуповорот вектора намагниченности на характерном расстоянии l/\sqrt{b} . При наличии границ, как было показано Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем, энергетически самым выгодным является решение (7.83) в виде периодической структуры — знакопеременной последовательности доменов. Понятие доменов было введено Вейсом в 1907 г.

Рассмотрим теперь двумерные решения, не зависящие от z и от времени, — так называемые магнитные вихри [0.14]. В этих вихрях, если они устойчивы, m_z меняет знак на некотором расстоянии от центра. Радиальный и азимутальный компоненты намагниченности образуют логарифмическую спираль, параметры которой трудно найти аналитически. В цилиндрической системе координат r, χ, z положим $\theta = \theta(r)$. $\varphi = \chi + \varphi_0$, где φ_0 — постоянная. Тогда (7.80) принимает вид:

$$l^2 r^{-1} \partial_r r \partial_r \theta = [(b + l^2/r^2) \cos \theta + \omega_H / \omega_0] \sin \theta. \quad (7.85)$$

Уединенное решение этого уравнения было найдено в [0.14]. В нем отрицательная намагниченность вдоль внешнего магнитного поля в центре вихря переходит в положительную на краях. Радиальный компонент намагниченности равен

$$m_r = m_x \cos \chi + m_y \sin \chi = \sin \theta \cos \varphi_0. \quad (7.86)$$

Азимутальный компонент получается равным $m_x = \sin\theta \sin\varphi_0$ и образует логарифмическую спираль поперек магнитного поля. По своей структуре такие двумерные вихри относятся к топологическим солитонам подобно одномерному домену (7.84).

Представляет интерес выяснить, возможны ли трехмерные солитоны-вихри намагниченности. Во внешнем магнитном поле вдоль оси анизотропии они могли бы соответствовать функциям вида $\theta = \theta(r, z)$. Подставляя эти выражения в (7.80), (7.81), получаем уравнение относительно θ :

$$l^2 (r^{-1} \partial_r r \partial_r + \partial_z^2) \theta = [(b + l^2/r^2) \cos\theta + \omega_H/\omega_0] \sin\theta. \quad (7.87)$$

По-видимому, (7.87) имеет в трехмерном пространстве гладкое решение, удовлетворяющее следующим граничным условиям: θ обращается в нуль при удалении от начала координат, а на оси симметрии при $r = 0$ $\theta = 0$, $\nabla\theta = 0$ в отличие от уравнения (7.85). В этом решении тороидальный и полоидальный компоненты m не зависят от угла χ . К сожалению, численное решение (7.87) пока не предпринималось. Известно сферически-симметричное численное решение, в котором $\varphi = \text{const}$, что описывается уравнением (7.87), если в его правой части положить $l = 0$ [0.14].

Глава 8

СОХРАНЕНИЕ СПИРАЛЬНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ МГД-СТРУКТУР

8.1. СОХРАНЕНИЕ МАГНИТНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ

Для нагрева плазмы ее необходимо изолировать от стенок с помощью магнитного поля, создаваемого внешними проводниками и током в плазме. Удерживаемую при этом плазму можно рассматривать как МГД-структуру. Наиболее перспективной считается плазменная конфигурация в виде тора, в котором силовые линии магнитного поля образуют вложенные друг в друга магнитные поверхности. Основной трудностью в создании таких структур является обеспечение их устойчивости. До последнего времени не были сформулированы достаточные условия устойчивого удержания даже в приближении идеальной МГД.

В большинстве работ исследование устойчивости плазмы проводилось спектральным методом. Для этого линеаризуются МГД-уравнения в окрестности состояния равновесия и исследуются частоты линейных колебаний. Энергетический принцип [8.1] является более простым вариантом этого метода. Такой подход дает достаточные условия того, что данная конфигурация неустойчива, или того, что отсутствуют возмущения, растущие со временем экспоненциально. Однако этим методом нельзя

определить отсутствие возмущений, растущих степенным образом (нелинейной неустойчивости).

Достаточное условие устойчивости выполнено, если у исследуемой нелинейной системы имеется функционал Ляпунова, положительно определенный для данной равновесной конфигурации (см. приложение П.2). Это условие накладывает ограничение и на форму равновесия, к которому оно может быть применено. В случае идеальной жидкости требуется, чтобы равновесие было экстремальной точкой какого-либо из первых интегралов движения. Если в этой точке вторая вариация данного интеграла строго положительна, то состояние устойчиво, а интеграл есть функционал Ляпунова.

Известные первые интегралы МГД-уравнений дают сильно ограниченный класс равновесий. Например, получается равновесие с градиентом давления, равным нулю [8.2]. Для исследования равновесий с конечным градиентом давления в [8.3–8.5] был найден интеграл в виде функциональной серии, т.е. в виде, содержащем произвольную функцию. Для получения этого интеграла воспользуемся системой МГД-уравнений для идеальной плазмы:

$$\rho d_t \mathbf{v} = -\nabla p + (4\pi)^{-1} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]; \quad (8.1)$$

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (8.2)$$

$$\partial_t p^{1/\gamma} + \text{div}(\mathbf{v} p^{1/\gamma}) = 0; \quad (8.3)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (8.4)$$

Здесь считается, что давление p меняется адиабатически с показателем γ ; \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Электрическое поле в средах с бесконечной проводимостью выражается по релятивистски инвариантной формуле $\mathbf{E} = [\mathbf{B}, \mathbf{v}]/c$. Заметим, что оно не зависит от потенциальной части \mathbf{A} . Из (8.4) следует уравнение для вектор-потенциала:

$$\partial_t \mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \nabla \psi, \quad (8.5)$$

где ψ — произвольная функция.

Выбор ψ определяет калибровку \mathbf{A} . Известна калибровка Кулона, при которой $\text{div } \mathbf{A} = 0$ и $\nabla^2 \psi = -\text{div}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. В [8.3] предложена калибровка $\psi = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, при которой (8.5) принимает вид:

$$\partial_t \mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (8.6)$$

Введем магнитную спиральность соотношением $s = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Отсюда и из (8.4) и (8.6) получаем:

$$\partial_t s + \text{div}(\mathbf{v} s) = 0. \quad (8.7)$$

Таким образом, при выбранной здесь калибровке спиральность сохра-

няется локально. Это приводит к появлению нового интеграла в виде функциональной серии

$$I_{f,D} = \int_D sf(\rho/s, p^{1/\gamma}/s) d^3x, \quad (8.8)$$

где D — произвольный жидкий объем, т.е. объем, точки которого перемещаются со скоростью v .

Приведем другие, хорошо известные интегралы МГД:

$$W = \int [\rho v^2/2 + p/(\gamma - 1) + B^2/(8\pi)] d^3x; \quad (8.9)$$

$$P = \int \rho v d^3x; \quad (8.10)$$

$$M = \int \rho [r, v] d^3x; \quad (8.11)$$

$$C = \int \rho [v, B] d^3x; \quad (8.12)$$

$$T = \oint [A, n] d\sigma, \quad (8.13)$$

где n — единичный вектор нормали к границе плазмы, интегрирование в (8.13) проводится по граничной поверхности плазмы.

8.2. УСТОЙЧИВОСТЬ МГД СТРУКТУР ПО ЛЯПУНОВУ

Иследуем представляющие наибольший интерес покоящиеся структуры, в которых $v = 0$. Не все из них можно исследовать методом Ляпунова [8.6]. Имея это в виду, функционал Ляпунова составим следующим образом [8.4, 8.5]:

$$L = W + I + \lambda T, \quad (8.14)$$

где λ — множитель Лагранжа. Здесь интеграл I выбирается в упрощенном виде:

$$I = (4\pi)^{-1} \int sf(\mu) d^3x; \quad \mu \equiv p^{1/\gamma}/s_1, \quad (8.15)$$

где f — произвольная функция только одного аргумента. При варьировании L вариации скорости, давления и вектор-потенциала будем считать независимыми. Равновесия, устойчивость которых можно исследовать по Ляпунову, определяются из уравнения Эйлера $\delta L = 0$. Вариация L по скорости v дает

$$\rho v = 0. \quad (8.16)$$

При варьировании L по давлению p получаем:

$$4\pi p^\sigma + \sigma \partial_\mu f = 0, \quad \sigma \equiv (\gamma - 1)/\gamma. \quad (8.17)$$

Варьируя по A , имеем [8.4]:

$$\text{rot} \mathbf{V} + 2\theta \mathbf{V} + [\nabla \theta, \mathbf{A}] = 0, \quad \theta \equiv f - \mu \partial_{\mu} f. \quad (8.18)$$

Необходимо также, чтобы поверхностный интеграл, получающийся при интегрировании по частям, обращался в нуль при произвольной вариации δA . Это дает условие на границе плазмы

$$(\mathbf{nV})|_{\partial D} = 0. \quad (8.19)$$

Здесь ∂D означает границу объема D .

Возможны два случая: 1) область D , заполненная плазмой, окружена металлическим кожухом с бесконечной проводимостью; 2) между D и кожухом имеется область вакуума, по которой интегрирование в функционале (8.15) не производится и где $f \equiv 0$. В случае 2 кроме условия (8.19) могут возникнуть дополнительные граничные условия из-за варьирования границы ∂D области D . В первом случае из соображений теплоизоляции необходимо, чтобы на границе плазмы с кожухом выполнялись условия:

$$p|_{\partial D} = 0; \quad \partial_n p|_{\partial D} = 0, \quad \partial_n^2 p|_{\partial D} = 0. \quad (8.20)$$

Это значит, что давление и поток тепла на границе равны нулю. Уравнения (8.17) – (8.19) определяют равновесные конфигурации, которые могут быть исследованы на устойчивость по Ляпунову. Для устойчивости достаточно, чтобы $\delta^2 L > 0$.

Применяя к (8.17) операцию ∇ , а к (8.18) – операцию div , получаем

$$4\pi \nabla p = s \nabla \theta; \quad \mathbf{V} \nabla \theta = 0. \quad (8.21)$$

Умножая (8.18) векторно на \mathbf{V} , с помощью (8.21) получаем

$$4\pi \nabla p = [\text{rot}(\mathbf{V}, \mathbf{V})], \quad (8.22)$$

а умножая (8.18) скалярно на \mathbf{A} , имеем

$$\mathbf{A} j + 2s\theta = 0. \quad (8.23)$$

Таким образом, в равновесии кроме очевидного условия (8.22) для исследования на устойчивость по Ляпунову необходимо еще выполнение условия (8.23). Кроме того, как следует из (8.17), давление является функцией спиральности.

Устойчивость МГД-структур имеет место, если вторая вариация $\delta^2 L$ строго положительна. Ее можно представить в виде суммы

$$\delta^2 L = l_V + l_D + l_{\partial D}, \quad (8.24)$$

где слагаемое l_D отвечает объему, занимаемому плазмой; $l_{\partial D}$ – слагаемое, связанное с вариацией границы, а l_V – вакуумной части между кожухом и плазмой. Из (8.14) получаем

$$l_D = \int_D \left\{ \frac{\delta B^2}{8\pi} + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\delta p}{p} \right)^2 + \frac{\rho \delta v^2}{2} + \theta s_2 - \right. \\ \left. - \frac{G' p^{1/\gamma}}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\delta p}{p} - \frac{s_1}{s} \right)^2 \right\} d^3x, \quad (8.25)$$

где $s_1 \equiv \mathbf{A} \delta \mathbf{B} + \mathbf{B} \delta \mathbf{A}$; $s_2 \equiv \delta \mathbf{A} \delta \mathbf{B}$; $\delta \mathbf{B} = \text{rot}(\delta \mathbf{A})$;

$$l_V = \frac{1}{8\pi} \int_V (\delta \mathbf{B})^2 d^3x; \quad (8.26)$$

$$l_{\partial D} = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \xi^2 \left\{ \partial_n(sf) + \left[\partial_n \left(\frac{B^2}{8\pi} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) \right] \right\} d^3x. \quad (8.27)$$

Здесь ξ — смещение границы вдоль нормали \mathbf{n} ; квадратные скобки [...] означают разность между предельными значениями функции снаружи и внутри области ∂D . В случае, когда плазма плотно прилегает к кожуху, $l_V = l_{\partial D} = 0$.

Можно показать, что для положительной определенности функционала (8.25) по переменной δp необходимо, чтобы

$$\gamma p^\sigma > \partial_\mu \theta. \quad (8.28)$$

При этом условии можно оценить l_D снизу:

$$l_D \geq \int_D \left\{ \frac{\delta B^2}{8\pi} + \theta s_2 + T s_1^2 \right\} d^3x; \quad (8.29)$$

$$T \equiv \frac{f''}{(f'' + \gamma s p^{1-2/\gamma})} \frac{\gamma p}{2s^2}, \quad (8.30)$$

причем при всех $\delta \mathbf{A}$ существует такое δp , что в (8.29) достигается равенство. Для положительной определенности (8.29) необходимо условие

$$\frac{f''}{f'' + \gamma s p^{1-2/\gamma}} > 0, \quad (8.31)$$

которое вместе с (8.28) дает необходимое условие положительной определенности:

$$s f'' > 0. \quad (8.32)$$

Пользуясь (8.17), переходим от $\theta(\mu)$ к функции $U(s)$ по формуле

$$\theta(\mu) = (4\pi)^{-1} \partial_s U(s), \quad p = p(s). \quad (8.33)$$

Тогда получаем:

$$4\pi p = \int s \partial_s^2 U ds; \quad (8.34)$$

$$T = (4\pi)^{-1} \partial_s^2 U. \quad (8.35)$$

При этом неравенства (8.31), (8.32) приводятся к простому виду:

$$0 < s^2 \partial_s^2 U < \gamma \int s \partial_s^2 U ds. \quad (8.36)$$

Все эти условия можно получить из "укороченного" функционала [8.5]:

$$L_1 = \int_D [B^2/2 + U(s)] d^3x. \quad (8.37)$$

Условия равновесия и устойчивости получаются отсюда в виде $\delta L_1 = 0$ и $\delta^2 L_1 > 0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Сводка упрощенных уравнений

Идеальная плазма описывается системой кинетических уравнений Власова с самосогласованными полями. Эта система описывает много различных ветвей колебаний. Колебания плазмы представляют собой возбуждение коллективных степеней свободы, в которых частицы участвуют согласованно друг с другом. Поэтому они хорошо описываются гидродинамическими уравнениями, выведенными из уравнений Власова. Возможно дальнейшее упрощение с целью выделения данной ветви или пары ветвей, взаимодействующих друг с другом. Это делается с помощью разложения по малым параметрам, входящим в уравнения. В результате получается упрощенное уравнение (часто его называют модельным) с малым числом переменных, наглядно описывающее явление с достаточно хорошей точностью.

Волновые уравнения принято делить на акустический и оптический типы. Уравнения, описывающие колебания оптического типа, содержат большой параметр ω_0 , имеющий смысл характерной частоты колебаний. Уравнения акустического типа содержат параметр c_s , имеющий смысл скорости распространения. В пределе коротких волн для обоих типов колебаний в плазме существенна дисперсия, которая характеризуется параметром r_D . Малыми величинами, используемыми при упрощении, обычно являются этот параметр и амплитуда волны. Кортвег

и де Фриз выдвинули идею, что при упрощении они должны рассматриваться как малые одного порядка. Эта плодотворная идея использовалась для получения множества различных уравнений. В неоднородной среде используется еще один параметр — отношение размера пакета к размеру неоднородности. В результате упрощения по этой схеме уравнения акустического типа обычно сводятся к уравнению Кортевега — де Фриза (КдФ), в котором нелинейность квадратична по амплитуде

$$\partial_t \Phi + \Phi \partial_z \Phi + \partial_z^3 \Phi = 0, \quad (\text{П.1.1})$$

а уравнение оптического типа сводится к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью:

$$i \partial_t E + \partial_z^2 E + |E|^2 E = 0. \quad (\text{П.1.2})$$

В случае двумерных или трехмерных пакетов эти уравнения в зависимости от того, изотропна среда или нет, обобщаются по-разному. В изотропной среде акустический тип уравнений обычно сводится к уравнению КП [0.3]:

$$\partial_z (\partial_t \Phi + \Phi \partial_z \Phi + \partial_z^3 \Phi) = \pm \nabla_{\perp}^2 \Phi. \quad (\text{П.1.3})$$

В замагниченной плазме уравнение трехмерного ионно-звукового пакета, бегущего вдоль магнитного поля, имеет вид [2.23]

$$\partial_t \Phi + \Phi \partial_z \Phi + \partial_z^3 \Phi = -\nabla_{\perp}^2 \partial_z \Phi. \quad (\text{П.1.4})$$

Эволюция трехмерного пакета ленгмюровских волн, которые относятся к оптическому типу, в изотропной плазме описывается уравнением В.Е. Захарова [3.4]:

$$\nabla^2 (i \partial_t \Phi + \nabla^2 \Phi) + \text{div}(|\nabla \Phi|^2 \nabla \Phi) = 0. \quad (\text{П.1.5})$$

При наличии магнитного поля такой же пакет, бегущий вдоль него, описывается уравнением [3.6]

$$\partial_z^2 (i \partial_t E + \partial_z^2 E + |E|^2 E) = \pm \nabla_{\perp}^2 E. \quad (\text{П.1.6})$$

Распространение одномерного пакета быстрых магнитозвуковых (БМЗ) и альфвеновских волн вдоль магнитного поля описывается уравнением [2.24]

$$\partial_t b + i \partial_z^2 b + \partial_z |b|^2 b = 0. \quad (\text{П.1.7})$$

При распространении под большим углом к магнитному полю упрощенное уравнение пакета БМЗ-волн имеет вид [2.18, 2.27]

$$\partial_y (\partial_t b + b \partial_y b + \alpha \partial_y^2 b) = -\nabla_{\perp}^2 b + \partial_z \partial_y^3 b + \partial_y^2 \partial_z^2 b. \quad (\text{П.1.8})$$

В результате упрощения, сохраняющего лишь основные черты явления, как правило, получаются уравнения, не содержащие каких-либо параметров. Но иногда, как в данном случае, упрощенное уравнение содержит безразмерный параметр α , который или невозможно устранить преобразованием подобия или же он сохраняется из соображений удобства.

При распространении под большим углом к магнитному полю скорость распространения низкочастотных ионно-звуковых волн стремится к дрейфовой скорости электронов u . В этом случае они хорошо описываются двумерным уравнением, полученным в [5.4] и совпадающим с уравнением, полученным в [0.9, 0.10] для атмосферных вихрей, характерный размер которых много больше глубины атмосферы, а частоты много меньше частоты вращения планеты (квазигеострофические вихри):

$$\partial_t (\Phi - \nabla_{\perp}^2 \Phi) + u \partial_y \Phi = \{ \Phi, \nabla_{\perp}^2 \Phi \}. \quad (\text{П.1.9})$$

Здесь появляется нелинейность в виде якобиана

$$\{ \Phi, \psi \} \equiv \partial_x \Phi \partial_y \psi - \partial_y \Phi \partial_x \psi \quad (\text{П.1.10})$$

В однородной плазме u равно нулю. Для сравнения напомним, что двумерные вихри в несжимаемой жидкости описываются уравнением

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + \{ \Phi, \nabla_{\perp}^2 \Phi \} \equiv d_t \nabla^2 \Phi = 0. \quad (\text{П.1.11})$$

Этим же уравнением описывается распространение пакета ленгмюровских волн под большим углом к магнитному полю, если ионы можно считать неподвижными. При выводе (П.1.9) для случая атмосферы предполагалось, что безразмерное давление Φ есть функция только плотности N . Если это не выполняется, синоптические возмущения в атмосфере описываются системой квазигеострофических уравнений мелкой бароклинной атмосферы [5.3]:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t (\Phi - \nabla_{\perp}^2 \Phi) + u_1 \partial_y \Phi &= \{ \Phi, \nabla_{\perp}^2 \Phi \} + \{ \Phi, N \}; \\ \partial_t N + \alpha \{ \Phi, N \} + u_2 \partial_y \Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.12})$$

Синоптические возмущения, в которых существенна зависимость от вертикальной координаты z , описываются уравнением

$$\partial_t (\Phi - \nabla_{\perp}^2 \Phi - \partial_z^2 \Phi) + u \partial_y \Phi = \{ \Phi, \nabla^2 \Phi \}. \quad (\text{П.1.13})$$

Если температура электронов в плазме неоднородна, то в (П.1.9) появляется дополнительная нелинейность типа КдФ [6.7 – 6.9]:

$$\partial_t \Phi + \partial_y (u \Phi + \nabla_{\perp}^2 \Phi + \alpha \Phi^2) = \{ \Phi, \nabla_{\perp}^2 \Phi \}. \quad (\text{П.1.14})$$

Это же уравнение пригодно и для описания крупномасштабных возмущений атмосферы ($\nabla_{\perp}^2 \Phi \ll \Phi$).

Альфвеновские волны, бегущие почти поперек магнитного поля, описываются системой уравнений, полученной в [0.11]:

$$\left. \begin{aligned} d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + d_z J &= 0; \quad d_z \equiv \partial_z - \{A \dots\}; \\ \partial_t A + d_z \Phi &= 0; \quad J \equiv \nabla_{\perp}^2 A. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.15})$$

Скорость распространения в ряде случаев может быть настолько мала, что в (П.1.15) появляется необходимость учета скорости диамагнитного дрейфа электронов. Одновременно нужно учесть и дисперсионные поправки, связанные с учетом продольного электрического поля. Тогда эти уравнения заменяются системой [6.12, 6.13]:

$$\left. \begin{aligned} d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + d_z J &= -\text{div} \{P, \nabla_{\perp} \Phi\}; \\ \partial_t A &= d_z (N - \Phi); \\ d_t N + d_z J &= 0; \quad d_t P = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.16})$$

До этого предполагалось, что размер пакета много больше ларморовского радиуса ионов r_{Bi} .

В случае, когда характерный размер пакета альфвеновских волн много меньше r_{Bi} , вместо (П.1.16) имеем [6.18]

$$\left. \begin{aligned} \tau \partial_t \Phi + u \partial_y \Phi &= d_z \nabla_{\perp}^2 A; \\ \partial_t A - u \partial_y A &= -(1 + \tau) d_z \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.17})$$

В уравнениях (П.1.16), (П.1.17) предполагалось, что давление плазмы достаточно высокое, так что альфвеновская скорость меньше тепловой скорости электронов. В обратном случае пакет альфвеновских волн описывается системой [6.14]:

$$\left. \begin{aligned} d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + d_z J &= 0; \\ \partial_t A - \alpha d_t J &= d_z (N - \Phi); \\ d_t N + d_z J &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.18})$$

В альфвеновских волнах силовые линии магнитного поля испытывают поперечные колебания, что описывается A -компонентом вектор-потенциала вдоль магнитного поля. Одновременно колеблется электрический потенциал Φ , что приводит к вихревым движениям плазмы почти поперек магнитного поля. Колебания строго поперек магнитного поля описываются уравнениями желобковых волн [6.19]:

$$d_t \nabla_{\perp}^2 \Phi + \text{div} \{N, \nabla_{\perp} \Phi\} = \alpha \partial_y N; \quad d_t N = 0. \quad (\text{П.1.19})$$

П.2. Устойчивость равновесных решений эволюционных систем по Ляпунову

В 1914 г. А.М. Ляпунов развил теорию устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем виде она довольно сложна. Ниже приведем некоторые результаты этой теории, относящиеся к устойчивости состояния равновесия автономных систем, т.е. систем типа

$$d_t x = f(x), \quad (\text{П.2.1})$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор; $f = (f_1, \dots, f_n)$ — n -мерная вектор-функция x , не зависящая явно от времени.

Система (П.2.1) описывает эволюцию точки x в n -мерном фазовом пространстве. Особый интерес представляют точки $x = x_0$ фазового пространства, где $f(x_0) = 0$, которые называются точками равновесия. Если фазовая точка находится в окрестностях x_0 , то возможны три случая: а) все точки фазового пространства с течением времени стремятся к x_0 ; б) все точки пространства осциллируют в окрестности x_0 , не удаляясь от него на значительное расстояние; в) какая-либо траектория или все удаляются от точки равновесия. В первых двух случаях равновесие называется устойчивым по Ляпунову. В этом случае, как показал А.М. Ляпунов, существует скалярная функция $L(x)$, удовлетворяющая в окрестности x_0 условиям:

- 1) $L(x)$ имеет непрерывные производные;
- 2) $L(x_0) = 0$;
- 3) $L(x) > 0$ при $x \neq x_0$;
- 4) при эволюции x в силу (П.2.1) $L(x)$ не нарастает. Последнее условие означает

$$d_t L(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} L(x) d_t x_k = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} L(x) f_k(x) \leq 0. \quad (\text{П.2.2})$$

Функцию $L(x)$ называют функцией Ляпунова.

Таким образом, точка равновесия автономной системы (П.2.1) устойчива, если в окрестности ее существует функция Ляпунова. В настоящее время эту теорему применяют и для уравнений в частных производных [8.6]. При этом вместо n -мерного вектора $x(t)$ появляется бесконечно-мерный вектор. В уравнениях с частными производными бесконечно-мерному вектору соответствует функция. При этом компоненты вектора нумеруются пространственными координатами. Функция Ляпунова переходит в функционал, а производные в (П.2.2) — в вариационные производные. Условие (П.2.2) выполняется, в частности, если L — первый интеграл системы. Из него ввиду гладкости L следует:

$$\partial_x L|_{x_0} = 0 \text{ или } \delta L|_{x_0} = 0. \quad (\text{П.2.3})$$

Это соотношение совместно с $f(x_0) = 0$ используют на практике для отбора из всего множества точек равновесия x_0 тех, которые, возможно, устойчивы. Окончательно устойчивость стационарной точки определяется проверкой условия 3, которое в случае уравнений в частных производных используется в виде

$$\delta^2 L|_{x_0} > 0. \quad (\text{П.2.4})$$

В этих условиях точка $x(t)$ никогда не сможет покинуть окрестность точки равновесия, следовательно, x_0 — стационарная точка, устойчивая по Ляпунову. Иногда вместо метода Ляпунова используют спектральный метод, как более простой. Он состоит в исследовании спектра частот линейных колебаний системы относительно точки равновесия. По этому методу равновесие устойчиво, если все частоты — затухающие, и неустойчиво, если хотя бы одна является растущей. Однако если хотя бы одна частота нейтральна (действительна), а остальные частоты затухающие, этот метод неэффективен. Поясним это на примере нелинейной системы

$$\dot{x} = -y + (r - \nu)x; \quad \dot{y} = x + (r - \nu)y, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (\text{П.2.5})$$

Частоты колебаний относительно точки покоя (равновесия) $r = 0$ суть $\omega = \pm 1 - i\nu$. Если $\nu > 0$, то равновесие устойчиво, если $\nu < 0$, то неустойчиво. Если же $\nu = 0$ (частоты действительны), то требуется дальнейшее исследование. В данном примере это сделать не трудно. Находим точное решение при $\nu = 0$:

$$r = 1/(t_0 - t). \quad (\text{П.2.6})$$

Из (П.2.6) видно, что степенной рост (нелинейная неустойчивость) спектральным методом не обнаруживается. Частоты колебаний около положения равновесия в обычной или магнитной гидродинамике в отсутствие диссипации обычно действительны. Поэтому для определения устойчивости спектральный метод оказывается недостаточным и полезно применять метод Ляпунова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ПРЕДИСЛОВИЮ И К ВВЕДЕНИЮ

- 0.1. Сагдеев Р.З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме//Вопросы теории плазмы: Сб. статей/Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–80.
- 0.2. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states//Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15, N 6. P. 240–242.
- 0.3. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах//Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. С. 753–756.
- 0.4. Теория солитонов /В.Е. Захаров, С.В. Манакон, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. М.: Наука, 1980.
- 0.5. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
- 0.6. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
- 0.7. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
- 0.8. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- 0.9. Charney J.G. On the scale of atmospheric motions//Geophys. Publ. 1947. Vol. 17, N 2. P. 17–20.
- 0.10. Обухов А.М. К вопросу о геострофическом ветре//Изв. АН СССР 1949. Т. 13, № 4. С. 281–286.
- 0.11. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Нелинейные волновые возмущения плазмы в токамаке//ЖЭТФ. 1973. Т. 65, № 2. С. 575–589.
- 0.12. Кадомцев Б.Б. Перезамыкание магнитных силовых линий//УФН. 1987. Т. 151, № 1. С. 3–29.
- 0.13. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные вихри в плазме//Физика плазмы. 1986. Т. 12, № 9. С. 1127–1144.
- 0.14. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагнитченности. Киев: Наукова думка, 1983.
- 0.15. Волкенштейн М.В. Общая биофизика. М.: Наука, 1978.
- 0.16. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах. М.: Советское радио, 1977.
- 0.17. Петвиашвили В.И., Янков В.В. Солитоны и турбулентность//Вопросы теории плазмы: Сб. статей. М.: Энергоатомиздат, 1985. Вып. 14. С. 3–55.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 1

- 1.1. Леонтович М.А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли//Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1944. Т. 8, № 1. С. 16–22.
- 1.2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1975. Т. 1.

- 1.3. Hasegawa A. Particle acceleration by MHD surface wave and formation of aurora. J. Geophys. Res. 1976. Vol. 18, N 28. P. 5083–5090.
- 1.4. Тимофеев А.В. О диссипативной неустойчивости слабоионизованной неоднородной плазмы в магнитном поле//ЖТФ. 1963. Т. 33, № 8. С. 909–914.
- 1.5. Моисеев С.С., Сагдеев Р.З. О коэффициенте диффузии Бома//ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 263–267.
- 1.6. Михайловский А.Б., Рудаков Л.И. К вопросу об устойчивости пространственно-неоднородной плазмы в магнитном поле//Там же. 1963. Т. 44, № 3. С. 912–920.
- 1.7. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1976. Т. 2.
- 1.8. Кадомцев Б.Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы//Вопросы теории плазмы: Сб. статей/Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1962. Вып. 2. С. 132–176.
- 1.9. Акасофу С.И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. М.: Мир, 1975. Т. 1, 2.
- 1.10. Иванов В.Н., Похотелов О.А. Желобковая неустойчивость в плазменном слое магнитосферы Земли//Физика плазмы. 1987. Т. 13. С. 301–309.
- 1.11. Брагинский С.И., Явления переноса в плазме//Вопросы теории плазмы: Сб. статей/Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 1. С. 183–272.
- 1.12. Тверской Б.А. О продольных токах в магнитосфере//Геомагнетизм и Аэронавтика. 1982. Т. 22, № 6. С. 991–995.
- 1.13. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Вихри в мелкой вращающейся атмосфере//Нелинейные волны: Сб. статей. М.: Наука, 1983. С. 107–112.
- 1.14. Flierl G. Baroclinic solitary waves with radial symmetry//Dyn. Atmos. Oceans. 1979. Vol. 3. N 1. P. 15–38.
- 1.15. Vaines P.A. A survey of blocking mechanisms with application to the Australian region//Austral. Meteorol. Mag. 1983. Vol. 31, N 1. P. 27–36.
- 1.16. Петвиашвили В.И. Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме//Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32, Т 11. С. 632–635.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 2

- 2.1. Method for solving the Korteweg de-Vries equation/C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura//Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.
- 2.2. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves//Comm. Pure Appl. Math. 1968. Vol. 21. P. 467–472.
- 2.3. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики//Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8, № 3. P. 43–53.
- 2.4. Дрюма В.С. Об аналитическом решении двумерного уравнения КдФ//Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19, № 12. С. 753–755.
- 2.5. Петвиашвили В.И. Об уравнении необыкновенного солитона//Физика плазмы. 1976. Т. 2, № 3. С. 469–472.
- 2.6. Two-dimensional solitons of the KP Equation and their interaction/L.A. Bordag, A.R. Its, V.B. Matveev e.a.//Phys. Lett. 1977. Vol. 63A, N 3. P. 205.
- 2.7. Зайцев А.А. О формировании стационарных нелинейных волн суперпозиций солитонов//Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 3. С. 583–587.
- 2.8. Кричевер И.М. Эллиптические решения уравнения КП и интегрируемые системы частиц//Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. С. 45.
- 2.9. Hirota R. Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices//J. Math. Phys. 1973. Vol. 19. P. 810–815.
- 2.10. Кузнецов Е.А., Турицын С.К. О двумерных и трехмерных солитонах в слабодиспергирующих средах//ЖЭТФ. 1982. Т. 82, № 5. С. 1457–1463.

- 2.11. Kuzmartsev F.V. On the classification of solitons//Physica Scripta. 1984. Vol. 29. P. 7–11.
- 2.12. Derrick G.H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles//J. Math. Phys. 1964. Vol. 5, N 9. P. 1252–1254.
- 2.13. Кузнецов Е.А., Мушер С.Л., Шафаренко А.В. Коллапс звуковых волн в средах с положительной дисперсией//Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 204–207.
- 2.14. Self-focussing of sound wave in magnetic with high effective anharmonicity//V.I. Ozhogin, D.Yu. Manin, V.I. Petviashvili, A.Yu. Lebedev//IEEE Transactions on Magnetics. 1983. Vol. Mag.-19, N 5. P. 1977–1979.
- 2.15. Турицын С.К., Фалькович Г.Е. Устойчивость магнитозвуковых солитонов и самофокусировка звука в антиферромагнетиках//ЖЭТФ. 1985. Т. 85, № 1. С. 258–270.
- 2.16. Ожогин В.И., Преображенский В.П. Эффективный ангармонизм упругой подсистемы антиферромагнетиков//Там же. 1977. Т. 73, № 3 (9). С. 988–1000.
- 2.17. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977.
- 2.18. Манин Д.Ю., Петвиашвили В.И. Самофокусировка магнитозвуковой волны//Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 38, № 9. С. 427–430.
- 2.19. McMahon A.B. Discussion of paper by C.F. Kennel and R.Z. Sagdeev "Collisionless shock waves in high- β plasmas, 2"//J. Geophys. Res. 1968. Vol. 73. P. 7539.
- 2.20. Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости//Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 6. С. 1321–1323.
- 2.21. Абрамян Л.А., Степанищ Ю.А. Двумерные мультисолитоны – стационарные решения уравнения КП//Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 1. С. 27–35.
- 2.22. Абрамян Л.А., Степанищ Ю.А. О структуре двумерных солитонов в средах с аномально малой дисперсией//ЖЭТФ. 1985. Т. 88, № 5. С. 1616–1621.
- 2.23. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. О трехмерных солитонах//ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 594–600.
- 2.24. Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasmas/K. Mio, T. Ogino, K. Minami, S. Takeda//J. Phys. Soc. Japan. 1976. Vol. 41. P. 265–273.
- 2.25. Kaup D.J., Newell A.C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation//J. Math. Phys. 1978. Vol. 19. P. 798–801.
- 2.26. Теория магнитозвуковой турбулентности/Р.З. Сагдеев, В.И. Сотников, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 747–751.
- 2.27. Структура нелинейных уравнений замагниченной плазмы и проблемы устойчивости МЗ солитонов/А.Б. Михайловский, Г.Д. Абурджания, О.Г. Онищенко, А.Н. Смоляков//ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 2. С. 482–497.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 3

- 3.1. Заставенко Л.Г. Частицеподобные решения нелинейного волнового уравнения//Прикл. матем. и механика. 1965. Т. 29. С. 430–439.
- 3.2. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщающей нелинейностью//Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. С. 1020–1028.
- 3.3. Веденов А.А., Рудаков Л.И. О взаимодействии волн в сплошных средах//Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 767–770.
- 3.4. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн//ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745–1758.
- 3.5. Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю. Диссипативный трехмерный ленгмюровский солитон//Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 2. С. 467–469.

- 3.6. Петвиашвили В.И. Трехмерные солитоны необыкновенной и ленгмюровской волн//Там же. 1975. Т. 1, № 1. С. 28–31.
- 3.7. Рудаков Л.И. Торможение электронных пучков в плазме с высоким уровнем ленгмюровской турбулентности//Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. С. 821–824.
- 3.8. Павленко В.П., Петвиашвили В.И. Зонная теория устойчивости нелинейных периодических волн в плазме//Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 206–210.
- 3.9. Горев В.В., Кингсеп А.С., Рудаков Л.И. Сильная ленгмюровская турбулентность//Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 691–712.
- 3.10. Захаров В.Е. Коллапс и самофокусировка ленгмюровских волн//Основы физики плазмы: Сб. статей. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2. С. 79–119.
- 3.11. Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Сильная турбулентность плазменных колебаний//Там же. С. 113–174.
- 3.12. Кингсеп А.С. Сильная ленгмюровская турбулентность и турбулентный нагрев плазмы//Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 4. С. 48–112.
- 3.13. Брейман Б.Н., Рютов Д.Д., Чеботаев П.З. Нелинейные эффекты при взаимодействии ультрарелятивистского электронного пучка с плазмой//ЖЭТФ. 1972. Т. 62, № 4. С. 1409–1423.
- 3.14. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е. О дипольном характере коллапса ленгмюровских волн//Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20, № 6. С. 365–370.
- 3.15. Cheung P.Y., Wong A.Y. Periodic collapse and long-time evolution of strong Langmuir turbulence//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55, N 18. P. 1880–1883.
- 3.16. Янкаускас Э.К. Радиальное распределение поля в самофокусировавшемся пучке света//Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9. С. 412–415.
- 3.17. Горшков К.А., Миронов В.А., Сергеев А.М. Связанные стационарные солитонные образования//Сб. статей: Нелинейные волны. М.: Наука, 1983. С. 112–128.
- 3.18. Браун Дж.Д.А. Нуклон-нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1979.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 4

- 4.1. Аликаев В.В. ВЧ- и СВЧ-методы нагрева плазмы//Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. М.: ВИНТИ, 1981. Т. 1, ч. 2. С. 80–99.
- 4.2. Голант В.Е., Федоров В.И. Высокочастотные методы нагрева плазмы в тороидальных термоядерных установках. М.: Энергоатомиздат, 1986.
- 4.3. Heating in Toroidal Plasmas. Proc. of the 4th International Symposium. Rome, 1984. Vol. 1, 2.
- 4.4. High-current discharges in the TER device. TFR. Group/Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1974. Vienna: IAEA, 1975. Vol. 1. P. 135–144.
- 4.5. PLT Group. PLT neutral beam heating results//Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. 1978. Vienna: IAEA, 1979. Vol. 1. P. 167–198.
- 4.6. Russel C.T., Holzer R.E., Smith E.J. OGO 3 observations of ELF noise in the magnetosphere. 2. The nature of the equatorial noise//J. Geophys. Res. 1970. Vol. 75, N 4. P. 755–768.
- 4.7. Gurnett D.A. The Earth as a radio source: terrestrial kilometric radiation//Ibid. 1974. Vol. 79, N 28. P. 4227–4238.
- 4.8. Bergmann R. Electrostatic ion (hydrogen) cyclotron and ion acoustic wave instabilities in regions of upward field-aligned current and upward ion beams//J. Geophys. Res. 1984. Vol. 89, N A2. P. 953–968.
- 4.9. Mozer F.S., Carlson C.W., Hudson M.K. Observations of paired electrostatic shocks in the polar magnetosphere//Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, N 6. P. 292–295.

- 4.10. Alexander J.K., Kaiser M.L. Terrestrial kilometric radiation. 2. Emission from the magnetospheric cusp and dayside magnetosheath//J. Geophys. Res. 1977. Vol. 82, N 1. P. 98–104.
- 4.11. Петвиашвили В.И. ВЧ-диамагнетизм и трехмерные циклотронные солитоны в плазме//Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23, № 12. С. 682–684.
- 4.12. Трехмерная самолокализация геликонов/Дж.Г. Ломинадзе, Г.З. Мачабели, В.И. Петвиашвили и др.//Там же. 1978. Т. 28, № 8. С. 560–564.
- 4.13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 483.
- 4.14. Пятаевский Л.А. Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией//ЖЭТФ. 1960. Т. 39, № 5. С. 1450–1458.
- 4.15. Вашими Х., Карпман В.И. О пондеромоторной силе высокочастотного электромагнитного поля в диспергирующей среде//Там же. 1976. Т. 71, № 9. С. 1010–1016.
- 4.16. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Альфвеновские и магнитозвуковые вихри в плазме//Там же. 1977. Т. 73, № 2. С. 498–505.
- 4.17. Некрасов А.К., Петвиашвили В.И. Диамагнетизм циклотронных волн в плазме//Там же. 1979. Т. 77, № 2. С. 605–616.
- 4.18. Бородачев Л.В., Некрасов А.К. Диамагнитная неустойчивость циклотронных волн в плазме//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1984. Т. 25, № 5. С. 91–98.
- 4.19. Бородачев Л.В., Некрасов А.К., Сигов Ю.С. Численное исследование диамагнетизма циклотронных волн в плазме//Препринт № 23 ИПМ АН СССР. М., 1981.
- 4.20. Залеский Ю.Г., Зинченко В.И., Назаров Н.И., Демченко В.В. Экспериментальное наблюдение нелинейных эффектов при возбуждении в плазме циклотронных волн большой амплитуды//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35, № 7. С. 281–284.
- 4.21. Некрасов А.К., Фейгин Ф.З. Магнитная нелинейность коротковолновых пакетов циклотронных волн//Физика плазмы. 1985. Т. 11, № 8. С. 971–977.
- 4.22. Бельков С.А., Цытович В.Н. Модуляционное возбуждение магнитных полей//ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 4. С. 1293–1302.
- 4.23. Некрасов А.К., Петвиашвили В.И. Самофокусировка и трехмерная локализация циклотронной волны, бегущей вдоль магнитного поля//Физика плазмы. 1981. Т. 7, № 5. С. 1145–1151.
- 4.24. Аскарьян Г.А. Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы//ЖЭТФ. 1962. Т. 42, № 6. С. 1567–1570.
- 4.25. Литвак А.Г. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме//Вопросы теории плазмы: Сб. статей/Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1980. С. 164–242.
- 4.26. Шафранов В.Д. Электромагнитные волны в плазме//Там же. Вып. 3. М.: Госатомиздат, 1963. С. 3–140.
- 4.27. Некрасов А.К. Диамагнитная самофокусировка электромагнитных циклотронных волн, бегущих поперек магнитного поля//Физика плазмы. 1986. Т. 12, № 8. С. 971–982.
- 4.28. Ранцев-Картниов В.А. Наблюдение электрических полей в плазме токамака//Там же. 1987. Т. 13, № 4. С. 387–391.
- 4.29. Гуревич А.В., Шварцбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 5

- 5.1. The Jupiter sistem through the eyes of Voyager-1/B.A. Smith, L.A. Soderblom, R. Beebe e.a.//Science 1979. Vol. 204, N 4396. P. 951–971.

- 5.2. The Galilean satellites and Jupiter: Voyager-2 imaging science results//B.A. Smith, L.A. Soderblom, R. Beebe e.a.//Ibid. 1979. Vol. 206, N 4421. P. 927-950.
- 5.3. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уравнения мелкой атмосферы//Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 856-858.
- 5.4. Hasegawa A., Mima K. Pseudo-three dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma//Phys. Fluids. 1978. Vol. 21, N 1. P. 87-92.
- 5.5. Hasegawa A. Advances in Physics. 1985. Vol. 34. P. 1.
- 5.6. Линь-Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
- 5.7. Тимофеев А.В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости//УФН. 1970. Т. 102, № 2. С. 185-210.
- 5.8. Ларичев В.Д., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби//Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. С. 1077-1079.
- 5.9. The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies/G.R. Flierl, V.D. Larichev, J.C. McWilliams, G.M. Reznik//Dynamics of Atm. Oceans 1980. Vol. 5, N 1. P. 1-41.
- 5.10. Гордин В.А., Петвиашвили В.И. Квазигеострофические вихри устойчивые по Ляпунову//Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 857-861.
- 5.11. Laedke E.W., Spatschek K.H. Two-dimensional drift vortices and their stability// Phys. Fluids. 1986. Vol. 29, N 1. P. 133-142.
- 5.12. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1982.
- 5.13. McWilliams J.C., Zabusky N.J. Interactions of isolated vortices//Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1982. Vol. 19. P. 207-227.
- 5.14. Ларичев В.Д., Резник М.Г. Численный эксперимент по расчету столкновения уединенных волн Россби//Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 1. С. 229-233.
- 5.15. Maxworthy T., Redekopp L.G. A solitary wave theory of the Great Red Spot and other observed features in the Jovian atmosphere//Icarus. 1976. Vol. 29. P. 261-271.
- 5.16. Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. БКП как синоптический вихрь в юпитерианской атмосфере//Письма в Астрон. журн. 1981. Т. 7, № 8. С. 505-509.
- 5.17. Петвиашвили В.И. Уединенные вихри в зональном потоке во вращающейся атмосфере//Там же. 1983. Т. 9, № 4. С. 253-256.
- 5.18. Корчагин В.И., Петвиашвили В.И., Рябцев А.Д. Уединенный вихрь в галактическом диске//Там же. 1988. Т. 14. С. 317.
- 5.19. Солитон Россби/С.В. Антипов, М.В. Незлин, Е.Н. Снежкин, А.С. Трубников// Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33, № 7. С. 368-372.
- 5.20. Незлин М.В. Солитоны Россби//УФН 1986. Т. 150, № 1, С. 3-60.
- 5.21. Антипов С.В., Незлин М.В., Трубников А.С. Автосолитон Россби//Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 25-28.
- 5.22. О дрейфовых солитонах в мелкой вращающейся жидкости/Р.А. Антонова, Б.П. Жвания, Дж.Г. Ломинадзе, Дж. И. Нанобашвили, В.И. Петвиашвили// Там же. 1983. Т. 37, № 11. С. 545-548.
- 5.23. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1, § 4.11.
- 5.24. Моделирование на мелкой быстро вращающейся жидкости вихрей в однородной замагниченной плазме/Антонова Р.А., Жвания Б.П., Ломинадзе Дж.Г., Нанобашвили Дж.И., Петвиашвили В.И.//Физика плазмы, 1987, № 11, Т. 13. С. 1327-1331.
- 5.25. Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики. М.: Наука, 1969.
- 5.26. Берестов А.Л. Некоторые новые решения для солитонов Россби//Иzv. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17, № 1. С. 82-87.
- 5.27. Петвиашвили Н.В., Фельдштейн А.Я. Усиление синоптических вихрей// Радиофизика. 1989. Т. 32. С. 784-789.

- 5.28. Гречко Г.М., Романенко Ю.В., Савченко С.А.//Атмосферно-оптические явления по наблюдениям с орбитальных научных станций "Салют", Тарту: АН ЭССР, 1981. С. 169.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 6

- 6.1. Муховатов В.С. Токамаки/Итоги науки и техники: Сборник статей. Сер. Физика плазмы. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 1, ч. 1. С. 6–118.
- 6.2. Мирнов С.В. Физические процессы в плазме токамака. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- 6.3. Церковников Ю.А. Устойчивость плазмы в сильном магнитном поле//ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 1. С. 67–74.
- 6.4. Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. О неустойчивости неоднородной плазмы в сильном магнитном поле//Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, № 3. С. 581–583.
- 6.5. Галеев А.А. Теория устойчивости неоднородной плазмы в сильном магнитном поле//ЖЭТФ. 1963. Т. 44, № 6. С. 1920–1934.
- 6.6. Михайловская Л.В., Михайловский А.Б. Дрейфовая неустойчивость плазмы в винтовом магнитном поле//Ядерный синтез. 1963. Т. 3, № 2. С. 113–123.
- 6.7. Петвиашвили В.И. Самофокусировка потенциальной дрейфовой волны//Физика плазмы. 1977. Т. 3, № 2. С. 270–272.
- 6.8. Tasso H. Shock like drift waves//Phys. Lett. 1967. Vol. 24A, N 11. P. 618–618.
- 6.9. Oraevsky V.N., Tasso H., Wobig H. Nonlinear drift waves in a plasma with a temperature gradient//Proc. of 3 ICPP and CNFR held in Novosibirsk. CN-24/E-6. Vienna, 1969.
- 6.10. Hasegawa A., Mima K. Exact solitary Alfvén wave//Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37, N 11. P. 690–693.
- 6.11. Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. О возбуждении конвективных ячеек альфвеновскими волнами//Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 27, № 6. С. 361–367.
- 6.12. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Альфвеновские дипольные вихри//Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 47–49.
- 6.13. Каладзе Т.Д., Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Конденсация альфвеновских волн в вихри в неоднородной плазме//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 106–113.
- 6.14. Negative energy vortices in inhomogeneous plasma/T.D. Kaladze, V.A. Marchenko, O.A. Pokhotelov, V.I. Petviashvili//Plasma Phys. and Control Fus. 1987. Vol. 29, N 5. P. 589–599.
- 6.15. Кадомцев Б.Б., Михайловский А.Б., Тимофеев А.В. Волны отрицательной энергии в диспергирующих средах//ЖЭТФ. 1964. Т. 47, № 6. С. 226–228.
- 6.16. Петвиашвили В.И., Погуце И.О. Желобковые солитоны в плазме с широм//Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 8. С. 363–365.
- 6.17. Марначев А.М. О дрейфово-альфвеновских вихрях//Физика плазмы. 1988. Т. 14, № 6. С. 832–844.
- 6.18. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Теория электронных процессов в сильном магнитном поле//Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 5. С. 225–228.
- 6.19. Петвиашвили В.И., Погуце И.О. Дрейфово-диссипативная генерация электронных вихрей в плазме//Там же. 1986. Т. 43, № 6. С. 268–270.
- 6.20. Пвленко В.П., Петвиашвили В.И. Уединенный вихрь при желобковой неустойчивости//Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 1034–1037.
- 6.21. Иванов В.Н., Похотелов О.А. Самопроизвольное зарождение и распространение вихревых трубок в дипольном магнитном поле//Там же. 1987. Т. 13. С. 41–49.
- 6.22. Некрасов А.К., Павленко В.П., Петвиашвили В.И. Конвекция при ВЧ-нагреве плазмы//Там же. 1985. Т. 11. С. 1264–1265.

- 6.23. Стефановский А.М. Ускорение электронов плазмы//Ядерный синтез. 1965. Т. 5, № 3. С. 215–227.
- 6.24. Budker G.I. CERN Symposium. 1956. Vol. 1. P. 68–71.
- 6.25. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Электропроводность плазмы в сильном магнитном поле//ЖЭТФ. 1967. Т. 53, № 6. С. 2025–2033.
- 6.26. Паранл З.В., Погуце О.П. Ускоренные электроны в токамаке//Вопросы теории плазмы: Сб. статей. М.: Энергоатомиздат, 1982. Т. 11. С. 5–55.
- 6.27. Петвиашвили В.И. Ионно-звуковые колебания, возбуждаемые электронным током//Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С. 1295–1298.
- 6.28. Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы//Вопросы теории плазмы: Сб. статей. М.: Атомиздат, 1964. Т. 4. С. 188–339.
- 6.29. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Нелинейная теория плазмы//Там же. 1973. Т. 7. С. 3–145.
- 6.30. Drummond W.E., Rosenbluth M.N. Anomalous diffusion arising from microinstabilities in a plasma//Phys. Fluids. 1962. Vol. 5, N 12. P. 1507–1513.
- 6.31. Коллективные явления в токонесящей плазме/Е.Д. Волков, Н.Ф. Перепелкин, В.А. Супруненко. Киев, Наукова думка, 1978.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 7

- 7.1. Шафранов В.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле//Вопросы теории плазмы: Сб. статей. М.: Атомиздат, 1963. Т. 2. С. 92–131.
- 7.2. Абрашкин А.А., Якубович Е.И. О плоских вихревых течениях идеальной жидкости//Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 1. С. 76–78.
- 7.3. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А., Чудин Н.В. Уединенные тороидальные вихри//ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1833–1839.
- 7.4. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А., Стенфло Л. Альфвеновские тороидальные солитоны в космической плазме//Физика плазмы. 1986. Т. 12, № 8. С. 949–952.
- 7.5. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле//Вопросы теории плазмы: Сб. статей. М.: Атомиздат, 1975. Т. 8. С. 3–87.
- 7.6. Belcher J.W., Davis L. Jr. Large-amplitude Alfvén waves in the Interplanetary Medium, 2//J. Geophys. Res. 1971. Vol. 76. P. 3534.
- 7.7. Coleman P.J. J. Geophys. Res. 1968. Vol. 153. P. 371–378.
- 7.8. Dobrovolny M., Mengeny A., Veltry P. Properties of magnetohydrodynamic turbulence in the Solar wind//Astron. and Astrophysics. 1980. Vol. 83. P. 26–32.
- 7.9. Kraichnan R.H. Inertial range spectrum of hydromagnetic turbulence//Phys. Fluids. 1965. Vol. 8, N 7. P. 1385–1387.
- 7.10. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. О звуковой турбулентности//Докл. АН СССР. 1973. Т. 218, № 4. С. 794–796.
- 7.11. Беспалов П.А., Трахтенгерц В.Ю. Альфвеновские мазеры. Горький. Изд-во Ин-та прикл. физ. АН СССР, 1986.
- 7.12. Владимиров В.В., Волков А.Ф., Мелихов Е.З. Плазма полупроводников. М.: Атомиздат, 1979.
- 7.13. Марначев А.М. Уединенные тороидальные вихри в z-пинче//Физика плазмы. 1987. Т. 13, № 5. С. 550–557
- 7.14. Исиченко М.Б., Марначев А.М. Нелинейные структуры в электронной МГД однородной плазме//ЖЭТФ. 1987. Т. 93, № 4. С. 1244–1255.
- 7.15. Филиппов Н.В. Обзор экспериментальных работ, выполненных в ИАЭ по исследованию плазменного фокуса//Физика плазмы. 1983. Т. 9, № 1. С. 25–44.
- 7.16. The initial value solution for sin-Gordon equation/M.J. Ablowitz, V.J. Kaur, A.C. Newell, H. Segur//Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31, N 2. P. 125–127.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛ. 8

- 8.1. Бейтман Г. МГД неустойчивости. М.: Энергоиздат, 1982.
- 8.2. Taylor J.V. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields//Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33, N 19. P. 1139–1141.
- 8.3. Гордин В.А., Петвиашвили В.И. Уравнение неразрывности спиральности в средах с бесконечной проводимостью//Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45, № 5. С. 215–216. ЖЭТФ. 1989. Т. 97. С. 1215.
- 8.4. Гордин В.А., Петвиашвили В.И. Калибровка вектор-потенциала и устойчивые по Ляпунову МГД равновесия//Физика плазмы. 1987. Т. 13, № 7. С. 880–884.
- 8.5. Gordin V.A., Petviashvili V.I. Sufficient conditions for the stability of the MHD equilibrium of ideal plasma//Proc. ICPP: Kiev, 1987. Vol. 3. P. 52–55.
- 8.6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Некоторые результаты линейной теории	9
1.1. Параболическое приближение Леонтовича	9
1.2. Волны в однородной плазме	10
1.3. Модификация дисперсионных уравнений с учетом неоднородности плазмы	15
1.4. Желобковая неустойчивость в магнитосфере Земли	17
1.5. Волны Россби в атмосфере	26
Глава 2. Нелинейные уравнения акустического типа	29
2.1. Модельные уравнения акустических волн в изотропных средах	29
2.2. Одномерные и двумерные солитонные решения УКП и их устойчивость	31
2.3. Устойчивость трехмерных солитонов УКП. Коллапс и самофокусировка	35
2.4. Метод стабилизирующего множителя для солитонных решений	39
2.5. Связанные солитонные состояния (мультисолитоны)	40
2.6. Модельное уравнение акустических волн в анизотропной среде. Трехмерный ионно-звуковой солитон в магнитном поле	45
2.7. Нелинейное распространение альфвеновских и магнитозвуковых волн вдоль магнитного поля	46
2.8. Распространение магнитозвуковых волн под углом к магнитному полю	48
Глава 3. Нелинейные уравнения оптического типа	52
3.1. Нелинейное уравнение Шредингера	52
3.2. Ленгмюровские волны в изотропной плазме. Уравнение Захарова	57
3.3. Уравнения ленгмюровских волн в магнитном поле. Стационарные решения и их устойчивость	59
3.4. Коллапс и кавитоны	64
3.5. Мультисолитонные решения НУШ	66
Глава 4. Диамагнетизм циклотронных волн в плазме и циклотронные солитоны	68
4.1. Нелинейное изменение магнитного поля	68
4.2. Модельное уравнение длинноволновых циклотронных колебаний	71
4.3. Модельные уравнения коротковолновых циклотронных колебаний	76
4.4. Самофокусировка и трехмерная локализация циклотронной волны, бегущей вдоль магнитного поля	79
4.5. Диамагнитная самофокусировка электромагнитных циклотронных волн, бегущих поперек магнитного поля	84
4.6. Эффекты циклотронных солитонов	90

Глава 5. Уединенные вихри в атмосферах быстровращающихся планет	91
5.1. Структуры в атмосферах и океанах	91
5.2. Уравнения мелкой воды	92
5.3. Уравнения мелкой атмосферы	94
5.4. Геострофическое приближение	95
5.5. Зональные потоки и их устойчивость	96
5.6. Солитонные решения Ларичева—Резника и вихревые дорожки	98
5.7. О дисперсионном расплывании возмущений в гиротропных средах	104
5.8. Устойчивость солитонных решений уравнения Чарни—Обухова	105
5.9. Антициклоны в зональном потоке	109
5.10. Лабораторное моделирование солитонов Россби	113
5.11. Трехмерные солитоны в мелкой стратифицированной атмосфере	121
5.12. Тепловые механизмы усиления вихрей в атмосфере	124
Глава 6. Двумерные дрейфовые вихри в плазме	128
6.1. Дрейфовые волны и конвекция в плазме	128
6.2. Возмущение плотности и давления ионов в дрейфовых волнах	129
6.3. Потенциальные дрейфовые вихри	132
6.4. Уравнения Кадомцева—Погуце и альфвеновские вихри	135
6.5. Уединенные альфвеновские вихри в неоднородной плазме конечного давления	137
6.6. Уединенные альфвеновские вихри в плазме малого давления	145
6.7. Конденсация альфвеновских волн в вихревых трубках	147
6.8. Диссипативная генерация электронных дрейфовых вихрей	149
6.9. Желобковые вихри	151
6.10. Уединенные баллонные вихри	154
6.11. Вихревая конвекция и аномальное сопротивление в плазме	158
Глава 7. Уединенные тороидальные вихри	160
7.1. Уединенные стационарные вихри в идеальной гидродинамике	160
7.2. Нестационарные двумерные решения в лагранжевых переменных	163
7.3. Уединенные вихри в магнитной гидродинамике	166
7.4. Модельное уравнение электронной гидродинамики	171
7.5. Тороидальные электронные вихри	173
7.6. Топологические солитоны в средах с постоянной намагниченностью	175
Глава 8. Сохранение спиральности и устойчивость по Ляпунову	178
МГД-структур	178
8.1. Сохранение магнитной спиральности	178
8.2. Устойчивость МГД-структур по Ляпунову	180
Приложения	183
П.1. Сводка упрощенных уравнений	183
П.2. Устойчивость равновесных решений эволюционных систем по Ляпунову	187

Научное издание

Петвиашвили Владимир Иосифович
Похотелов Олег Александрович

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ И АТМОСФЕРЕ

Редактор Э. Д. Андреевко
Художественные редакторы: А. Т. Кирьянов, Т. Н. Хромова
Технический редактор М. А. Канониди
Корректор Н. А. Курдюкова

ИБ № 2357

Набор выполнен в издательстве. Подписано в печать с оригинала-макета 08.06.89.
Т-11183. Формат 60 x 88 1/16. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Усл.
печ.л. 12,25. Усл.кр.-отт. 12,49. Уч.-изд.л. 12,58. Тираж 1360 экз. Заказ 2079.
Цена 2 р. 50 к.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Отпечатано в Московской типографии № 9 МПО "Всесоюзная книжная палата"
Госкомиздата СССР.
109033, Москва, Волочаевская ул., 40.

В.И.Петвиашвили О.А.Похотелов

**УЕДИНЕННЫЕ
ВОЛНЫ
в плазме
и атмосфере**

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ